

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

РОБОЧА ПРОГРАМА,
методичні вказівки та контрольні завдання
до вивчення дисципліни “Вища математика”
для студентів усіх спеціальностей
заочної форми навчання

Частина 2

Дніпропетровськ НМетАУ 2006

УДК 517(07)

Робоча програма, методичні вказівки та контрольні завдання до вивчення дисципліни “Вища математика” для студентів усіх спеціальностей заочної форми навчання. Частина 2 / Укл.: А.В. Павленко, І.В. Пасічник, І.Л. Шинковська, В.Л. Копорулін та ін. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2006. - 136 с.

Наведені рекомендації до вивчення дисципліни “Вища математика”; мета та завдання дисципліни; необхідний обсяг знань і умінь студентів у результаті її вивчення; методичні вказівки до вивчення кожного з розділів і література, що рекомендується; питання для самоконтролю, а також варіанти контрольних завдань, які виконуються студентами в процесі вивчення дисципліни.

Призначена для студентів усіх спеціальностей заочної форми навчання.

Укладачі: А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

І.В. Пасічник, канд. техн. наук, доц.

І.Л. Шинковська, ст. викл.

В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, доц.

О.Є. Запорожченко, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Т.М. Кадицьникова, канд. техн. наук, доц.

І.В. Щербина, ст. викл.

Л.В. Маринчук, ст. викл.

А.Г. Моня, канд. техн. наук, доц.

Л.В. Моссаковська, ст. викл.

Т.П. Бас, асистент

Л.І. Галій, асистент

І.П. Заєць, асистент

П.Г. Хорошманенко, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф.(НГУ)

Підписано до друку 14.12.06. Формат 60х84 1/16. Папір друк. Друк плоский. Облік.-вид. арк. 8,00. Умов. друк. арк. 7,91. Тираж 600 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ

**Програма дисципліни “ВИЩА МАТЕМАТИКА”
(3 семестр)**

1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь . Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші. Теорема існування та єдиності рішення задачі Коші. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, однорідні, лінійні, Бернуллі.
2. Диференціальні рівняння другого порядку. Задача Коші. Рівняння, що допускають пониження порядку.
3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку однорідні та неоднорідні. Поняття загального розв’язку.
4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Рівняння з правою частиною спеціального вигляду.

2. ПОДВІЙНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

1. Задачі, що приводять до подвійного інтеграла. Означення подвійного інтеграла, його основні властивості. Зміна порядку інтегрування в подвійному інтегралі.
2. Обчислення подвійного інтеграла в декартових та полярних координатах. Перехід від декартових координат до полярних.
3. Застосування подвійних інтегралів до обчислення площ фігур.
4. Задачі, що приводять до криволінійних інтегралів. Означення криволінійних інтегралів по довжині дуги та по координатам, їх основні властивості та обчислення.

3. РЯДИ

1. Числові ряди. Збіжність і сума ряду. Необхідна умова збіжності. Ряди з додатними членами. Ознаки збіжності: ознаки порівняння Да-

ламбера, інтегральна ознака Коші. Знакопочережні ряди. Абсолютна і умовна збіжність. Ознака Лейбніца.

2. Функціональні ряди. Область збіжності. Степеневі ряди. Радіус і інтервал збіжності. Властивості степеневих рядів.
3. Розвинення функцій в степеневі ряди. Ряди Тейлора і Маклорена. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.
4. Ряд Фур'є. Розвинення функцій у ряд Фур'є. Умови розвинення функцій в ряд Фур'є.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Підручник в 2-х томах, т.2 – М.: Інтеграл – Прес, 2002. – 416 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – Київ, “А.С.К.”, 2005. – 648 с.
3. Вища математика. Збірник задач / За редакцією В.П.Дубовика, І.І.Юрика. – Київ, “А.С.К.”, 2004. – 480 с.
4. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі. – Київ, Вц “Академія”, 2002. – 624 с.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

Тема 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Диференціальним рівнянням називають рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, шукану функцію та її похідні (або диференціали):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \text{ або}$$

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{(n)}y}{dx^n}) = 0.$$

Порядок диференціального рівняння визначається найвищим порядком похідної (диференціала) цього рівняння.

Диференціальне рівняння є звичайним, якщо невідома функція є функцією однієї змінної. У випадку, коли невідома функція є функцією багатьох змінних диференціальне рівняння називають рівнянням у частинних похідних. Надалі ми будемо розглядати звичайні диференціальні рівняння.

Розв'язком диференціального рівняння є функція $y = j(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність.

Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд:

$$F(x, y, y') = 0,$$

де x - незалежна змінна, y - шукана функція, y' - похідна шуканої функції.

Якщо рівняння можна розв'язати відносно похідної, то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y).$$

Загальним розв'язком такого рівняння називається функція $y = j(x, C)$, яка залежить від аргументу x і довільної сталої C , та задовольняє умовам:

- 1) при будь-якому C вона задовольняє рівняння;
- 2) при будь-яких $x = x_0$ та $y = y_0$ можна знайти таке $C = C_0$,
що функція $y = j(x, C_0)$ задовольняє початкову умову :

$$y(x_0) = y_0.$$

Цю функцію $y = j(x, C_0)$ називають *частинним розв'язком* диференціального рівняння.

Рівняння виду $y' = f(x) \cdot g(y)$, де $f(x)$ і $g(y)$ - задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Права частина цього рівняння являє собою добуток двох множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Щоб розв'язати таке рівняння, треба відокремити змінні. Для цього замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, поділимо обидві частини рівняння на $g(y) \neq 0$ і помножимо на dx .

Отримаємо :

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx.$$

Інтегруючи обидві частини останнього рівняння, знайдемо загальний розв'язок :

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx.$$

Диференціальне рівняння, розглянуте вище, є окремим випадком рівняння

$$f_1(x) g_1(y) dx + f_2(x) g_2(y) dy = 0.$$

Для відокремлення змінних в цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на функцію $g_1(y) g_2(x) \neq 0$, а потім проінтегрувати.

Зауваження. Здійснюючи операцію відокремлювання змінних, можна втратити деякі розв'язки даного рівняння, тому треба виконувати перевірку.

Рівняння вигляду $y' = f(x, y)$ називається *однорідним*, якщо функція $f(x, y)$ - однорідна функція нульового виміру, тобто для неї виконується рівність:

$$f(l\ x, l\ y) = l^0 \times f(x, y) = f(x, y).$$

Очевидно, рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ буде однорідним тоді і тільки тоді, коли функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ будуть однорідними функціями одного й того самого виміру.

Підстановкою $y = ux$, де $u(x)$ - невідома функція, однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними відносно u і x . Відокремлюючи змінні, інтегруючи та підставляючи $u = \frac{y}{x}$, знаходимо загальний розв'язок рівняння.

Рівняння називається *лінійним*, якщо невідома функція та її похідна входять у це рівняння лінійно.

Воно має вигляд:

$$y' + p(x)y = q(x),$$

де $p(x)$ і $q(x)$ - задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Загальний розв'язок рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = uv.$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ - невідомі функції, причому одну з цих функцій обираємо довільно, а другу визначаємо з рівняння.

В цілому лінійне рівняння зводиться до двох рівнянь з відокремлюваними змінними, з яких дістанемо функції $u(x)$ та $v(x)$.

Диференціальні рівняння другого порядку

Диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння вигляду

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

або

$$y'' = f(x, y, y'),$$

де x - незалежна змінна, y - шукана функція, y' та y'' - похідні цієї функції.

Загальним розв'язком диференціального рівняння другого порядку є функція

$$y = j(x, C_1, C_2),$$

яка залежить від аргументу x і довільних сталих C_1 та C_2 , та задовольняє умовам:

- 1) при будь-яких C_1, C_2 вона задовольняє рівнянню ;
- 2) при будь-яких $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0$ можна знайти такі C_1, C_2 , щоб функція $y = j(x, C_1^0, C_2^0)$ задовольняла початковим умовам.

Задача Коші для диференціального рівняння другого порядку полягає у тому, щоб знайти частинний розв'язок рівняння, який буде задовольняти початковим умовам :

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають пониження порядку

1. Загальний розв'язок рівняння

$$y'' = f(x),$$

де $f(x)$ - задана неперервна функція, знаходять двократним послідовним інтегруванням.

Зауваження. Диференціальні рівняння n - го порядку, що мають вигляд $y^{(n)}(x) = f(x)$ теж розв'язують послідовним n - кратним інтегруванням.

2. Диференціальне рівняння, що явно не містить шукану функцію y , вигляду

$$F(x, y', y'') = 0$$

за допомогою підстановки $y' = P(x), y'' = P'(x)$ зводять до відповідного рівняння першого порядку $F(x, P, P') = 0$.

Розв'язок цього рівняння знаходять, виходячи з типу рівняння, а потім, для отримання загального розв'язку, розглядають рівняння $y' = P$.

3. Диференціальне рівняння, яке явно не містить незалежної змінної x , вигляду

$$F(y, y', y'') = 0,$$

зводять до диференціального рівняння першого порядку $F(y, P(y), P'(y)) = 0$ за допомогою підстановки $y' = P(y)$; $y'' = P'_y \times y' = P' \times P$.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння

$$y'' + p y' + q y = f(x).$$

Якщо p та q є сталі числа, то рівняння називається *лінійним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами*.

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння називається *однорідним*, якщо $f(x) \neq 0$ - *неоднорідним*.

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $y'' + p y' + q y = 0$ має вигляд

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де $y_1(x)$ та $y_2(x)$ - лінійно-незалежні частинні розв'язки рівняння, тобто $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}$, а C_1, C_2 - довільні сталі.

Для знаходження y_1, y_2 треба розв'язати характеристичне рівняння

$$k^2 + p k + q = 0.$$

Можливі наступні випадки.

k_1, k_2 - корені характеристичного рівняння	y_1, y_2 - частинні розв'язки	$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$
k_1, k_2 - дійсні різні числа, $k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
$k_1 = k_2$ - дійсні однакові числа	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = x e^{k_1 x}$	$y = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$
$k_{1,2} = a \pm b i$ - комплексно-спряжені числа, $i^2 = -1$ - уявна одиниця, a, b - дійсні числа.	$y_1 = e^{ax} \cos bx$ $y_2 = e^{ax} \sin bx$	$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

Якщо права частина $f(x)$ лінійного неоднорідного рівняння є функцією спеціального вигляду, то рівняння можна розв'язати *методом невизначених коефіцієнтів*, і загальний розв'язок має вигляд:

$$y = \bar{y} + y^*,$$

де \bar{y} - загальний розв'язок однорідного рівняння,

y^* - частинний розв'язок неоднорідного рівняння, який залежить від функції $f(x)$ та коренів характеристичного рівняння k_1, k_2 .

Можливі такі випадки:

1. Нехай $f(x) = e^{ax} P_n(x)$, де $P_n(x)$ - многочлен степеня n , тобто

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ тоді:}$$

а) якщо $k_1 \neq a$, $k_2 \neq a$, тоді частинний розв'язок обираємо у вигляді $y^* = e^{ax} Q_n(x)$, де $Q_n(x)$ - многочлен степеня n з невідомими коефіцієнтами, тобто, якщо

$$\begin{aligned}
n = 0 \quad Q_n(x) &= A, \\
n = 1 \quad Q_n(x) &= Ax + B, \\
n = 2 \quad Q_n(x) &= Ax^2 + Bx + C, \\
n = 3 \quad Q_n(x) &= Ax^3 + Bx^2 + Cx + D;
\end{aligned}$$

б) якщо $k_1 \neq a$, $k_2 = a$, тоді $y^* = x e^{ax} Q_n(x)$;

в) якщо $k_1 = k_2 = a$, тоді $y^* = x^2 e^{ax} Q_n(x)$.

Зауваження 1. Для знаходження невідомих коефіцієнтів многочлена $Q_n(x)$ треба підставити функцію y^* та її похідні першого та другого порядку в вихідне рівняння, та прирівняти коефіцієнти при однакових степенях n з обох його сторін. Таким чином, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо невідомі коефіцієнти.

2. Нехай $f(x) = e^{ax} [P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx]$, де $P_n(x), Q_m(x)$ - многочлени степенів n та m , тоді існують такі випадки:

а) якщо $k_{1,2} \neq a \pm bi$, тоді $y^* = e^{ax} [Q_s(x) \cos bx + L_s(x) \sin bx]$, де $Q_s(x), L_s(x)$ - многочлени степеня $s = \max\{n, m\}$ з невідомими коефіцієнтами;

б) якщо $k_{1,2} = a \pm bi$, тоді $y^* = x e^{ax} [Q_s(x) \cos bx + L_s(x) \sin bx]$.

Зауваження 2. У цьому випадку для знаходження невідомих коефіцієнтів многочленів $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ діємо так само, але прирівнюємо коефіцієнти при $\cos bx$, $\sin bx$, внаслідок чого знов дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо невідомі коефіцієнти.

Тема 2. ПОДВІЙНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Узагальнення основних ідей і методів інтегрального числення функцій однієї змінної на функції декількох змінних приводить до поняття подвійного інтеграла.

За означенням $\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, h_i) D S_i$,

де $f(x, y)$ - функція визначена в замкненій обмеженій області D , яка розбита на n частин, площі яких дорівнюють $D S_i$ ($i = 1, \bar{n}$);

вираз $\sum_{i=1}^n f(x_i, h_i) D S_i$ - це інтегральна сума для функції $f(x, y)$

по області D , а $P_i(x_i, h_i)$ - довільна точка у кожній області D_i ;

l - найбільший з діаметрів областей D_i .

Причому границя, яка стоїть у правій частині формули, не залежить ні від способу розбиття області D на частинні області D_i , ні від вибору точок P_i в них та називається *подвійним інтегралом*. У цьому випадку функція $f(x, y)$ називається інтегрованою в області D .

Обчислення подвійного інтеграла за наведеною формулою пов'язане із значними труднощами. Щоб їх уникнути, зводять подвійний інтеграл до так званого повторного інтеграла.

Припустимо спочатку, що область D обмежена двома неперервними кривими $y = j_1(x)$ та $y = j_2(x)$ і двома прямими $x = a$, $x = b$, причому $j_1(x) \leq j_2(x)$ для всіх $x \in (a; b)$ (рис. 1).

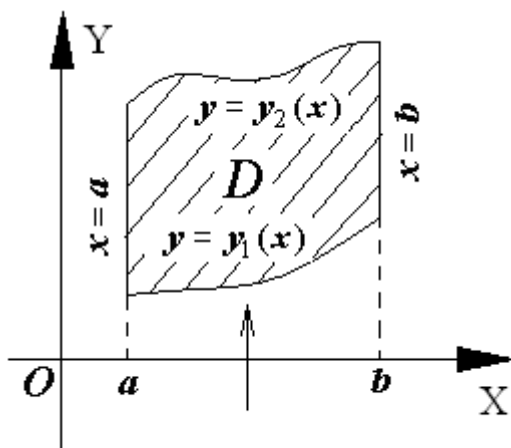


Рис. 1

Цю область назвемо *правильною в напрямі осі OY* , якщо довільна пряма, яка проходить через внутрішню точку області паралельно осі OY , перетинає межу області не більше, ніж у двох точках.

$$\text{Тоді } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x, y) dy.$$

Праву частину цієї формули називають *повторним інтегралом* від функції $f(x, y)$ по області D .

У повторному інтегралі інтегрування виконується спочатку по змінній y (при цьому x вважається сталою), а потім по змінній x . У результаті обчислення внутрішнього інтеграла одержуємо певну функцію від однієї змінної x . Інтегруючи цю функцію в межах від a до b , тобто обчислюючи зовнішній інтеграл, дістанемо деяке число – значення подвійного інтеграла.

Якщо область D обмежена двома неперервними кривими $x = y_1(y)$, $x = y_2(y)$ і двома прямими $y = c$, $y = d$ ($c < d$), причому $y_1(y) \leq y_2(y)$ для всіх $y \in (c; d)$, тобто, якщо область D *правильна в напрямі осі OY* (рис. 2), то справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{y_1(y)}^{y_2(y)} f(x, y) dx.$$

У правій частині цієї формули знову стоїть повторний інтеграл. Тут внутрішній інтеграл є інтеграл по змінній x . При його обчисленні y вважається сталою, і ми дістанемо деяку функцію від однієї змінної y . Інтегруючи потім цю функцію в межах від c до d , дістанемо значення подвійного інтеграла.

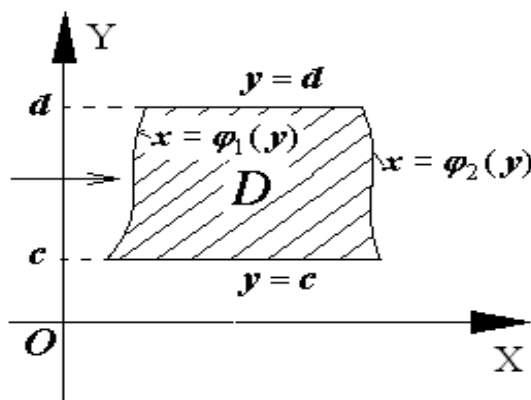


Рис. 2

Зауваження 1. Якщо область D є правильною в обох напрямках, то подвійний інтеграл можна обчислювати за допомогою обох формул. Результати матимемо однакові.

Зауваження 2. Якщо область D не є правильною ні в напрямі осі OX , ні в напрямі OY , то таку область необхідно розбивати на частини, кожна з яких є правильною областю в одному із напрямів. Обчислюючи подвійні інтеграли по правильних областях і додаючи результати, знаходимо шуканий подвійний інтеграл по області D .

Зауваження 3. Повторні інтеграли в правих частинах наведених формул називаються інтегралами з різним порядком інтегрування. Щоб змінити порядок інтегрування, потрібно від однієї формули перейти до другої формули, або навпаки. У кожному конкретному випадку, залежно від виду області D та підінтегральної функції $f(x, y)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

Подвійні інтеграли мають широке застосування до задач геометрії. Наприклад, якщо в площині XOY задана фігура, що має форму обмеженої замкненої області D , то площа S цієї фігури знаходиться за формулою:

$$S = \iint_D dx dy.$$

Криволінійні інтеграли

Такі інтеграли являють собою узагальнення поняття визначеного інтеграла на випадок, коли областю інтегрування є деяка крива. Розрізняють два види криволінійних інтегралів: криволінійні інтеграли першого роду (по довжині дуги) і криволінійні інтеграли другого роду (по координатам). Розглянемо їх окремо.

За означенням *криволінійний інтеграл першого роду*

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, h_i) \Delta l_i,$$

де $f(x, y)$ – функція обмежена на гладкій чи кусково-гладкій кривій AB площини XOY , яка розбита на n часткових дуг, довжина яких Δl_i ;

вираз $\sum_{i=1}^n f(x_i, h_i) D l_i$ називається інтегральною сумою для функції $f(x, y)$ по кривій AB , а $M_i(x_i, h_i)$ - довільна точка на кожній із часткових дуг;

l - найбільша з довжин окремих часткових дуг.

Причому границя, що стоїть в правій частині формули, не залежить від способу розбиття кривої AB і вибору точок M_i .

Для обчислення криволінійного інтеграла першого роду користуються однією з формул:

1) якщо крива AB задана рівнянням $y = j(x)$ ($a \leq x \leq b$), де функція $j(x)$ неперервна разом із своєю похідною на $[a; b]$, то

$$\oint_{(AB)} f(x, y) dl = \int_a^b f[x, j(x)] \times \sqrt{1 + j'^2(x)} dx, \quad dl = \sqrt{1 + j'^2(x)} dx - \text{диференціал дуги кривої};$$

2) якщо крива AB задана в параметричному вигляді рівняннями

$x = j(t), y = y(t)$ ($a \leq t \leq b$), причому функції $j(t), y(t)$ разом зі своїми похідними неперервні на $[a, b]$, то

$$\oint_{(AB)} f(x, y) dl = \int_a^b f[j(t), y(t)] \times \sqrt{j'^2(t) + y'^2(t)} dt,$$

$$\text{де } dl = \sqrt{j'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Зауваження 1. Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку шляху інтегрування, тобто $\oint_{(AB)} f(x, y) dl = \oint_{(BA)} f(x, y) dl$. У зв'язку з цим межі інтегрування завжди треба брати від меншої до більшої.

Криволінійний інтеграл другого роду визначається майже так само, як інтеграл першого роду.

А саме

$$\oint_{(AB)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(x_i, h_i) D x_i + \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(x_i, h_i) D y_i,$$

де $P(x, y), Q(x, y)$ - обмежені на кривій AB функції, $M_i(x_i, h_i)$ - довільна точка на кожній частинній дузі $A_{i-1}A_i$ ($i = \overline{1, n}$),

Dx_i, Dy_i - проекції вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісі OX, OY відповідно.

При обчисленні криволінійного інтеграла другого роду використовують одну із формул:

1) якщо крива AB задана явно рівнянням $y = j(x)$, де $j(x)$ - неперервна разом зі своєю похідною на $[a, b]$ функція, та при переміщенні від точки A до точки B вздовж кривої абсциса змінюється від a до b , то

$$\int_{(AB)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, j(x)) + Q(x, j(x)) \cdot j'(x)] dx;$$

2) якщо крива AB задана параметричними рівняннями $x = j(t)$, $y = y(t)$, де функції $j(t)$, $y(t)$ - неперервні разом із своїми похідними на $[a, b]$, та при переміщенні від точки A до точки B вздовж кривої параметр t змінюється від a до b , то

$$\int_{(AB)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(j(t), y(t)) \cdot j'(t) + Q(j(t), y(t)) \cdot y'(t)] dt.$$

Зауваження 2. Криволінійний інтеграл другого роду залежить від напрямку шляху інтегрування і при зміні цього напрямку змінює свій знак:

$$\int_{(AB)} P dx + Q dy = - \int_{(BA)} P dx + Q dy.$$

Це пов'язане з тим, що при зміні напрямку руху по кривій, змінюються знаки проекцій Dx_i і Dy_i в відповідних інтегральних сумах.

Тема 3. РЯДИ

Числові ряди. Основні поняття

Нехай $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n \dots$ - нескінченна послідовність чисел. Вираз $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається *числовим рядом*.

Ряд називається *збіжним*, якщо послідовність його часткових сум $\{S_n\}$, де $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, має кінцеву границю, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Число S називається *сумою ряду*.

Ознаки збіжності додатних числових рядів

Необхідна умова збіжності

Якщо ряд збігається, то його загальний член u_n прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Наслідок. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Ознака збіжності Даламбера

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то

при $l < 1$	ряд збігається,
при $l > 1$	ряд розбігається,
при $l = 1$	ознака відповіді не дає.

Інтегральна ознака Коші

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Нехай $f(x)$ - неперервна, додатна функція, яка не зростає для $x \geq 1$ і

$$f(1) = u_1, \quad f(2) = u_2, \quad \dots, f(n) = u_n, \dots$$

Тоді для збіжності ряду необхідно і достатньо, щоб збігався невластний інтеграл $\sum_{n=1}^{\infty} f(x) dx$.

Гранична ознака порівняння

Нехай є два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, де $k \neq 0$, $k \neq \infty$, то ці два ряди або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Такі ряди називають еквівалентними та позначають це так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Знакопозереджені ряди

Числовий ряд називається *знакопозередженим*, якщо його члени, що стоять поруч, мають різні знаки.

Такі ряди мають вигляд:

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad (1)$$

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad (2)$$

де a_n - абсолютна величина члена ряду.

Ознака Лейбніца

Якщо в започередженному ряду (2) члени такі, що

$$1) a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

то ряд збігається, його сума додатна і не перевершує перший член ряду.

Знакопочережний ряд називається *умовно збіжним*, якщо він збігається, а ряд, складений з абсолютних величин його членів, розбігається.

Знакопочережний ряд називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд з абсолютних величин його членів.

Функціональні ряди. Поняття степеневому ряду.

Радіус та інтервал збіжності степеневому ряду.

Вираз виду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається *функціональним рядом*, якщо $u_n(x)$ - функція.

Функціональний ряд виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ називається *степеневим*, якщо a_n - числові коефіцієнти.

Для визначення радіуса та інтервалу збіжності степеневому ряду існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R \quad \text{або} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Число R називається *радіусом збіжності* степеневому ряду, а $(-R; R)$ - *інтервалом збіжності*.

Розвинення елементарних функцій у ряди

Тейлора і Маклорена.

Ряд Тейлора має вигляд:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

При $a = 0$ маємо ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Розвинення деяких функцій у ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (x \in (-\infty; \infty));$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (x \in (-\infty; \infty));$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (x \in (-\infty; \infty));$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!}x^n + \dots \quad (x \in (-1; 1));$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (x \in (-1; 1]);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (x \in [-1; 1]);$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 3}{2^2 \times 2! \times 5} x^5 + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n (n-1)!} \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (x \in (-1; 1)).$$

Ряди Фур'є

Нехай функція $f(x)$ є періодичною з періодом $2p$ і кусково-диференційована на відрізку $[-p; p]$. Тоді *рядом Фур'є* цієї функції називається *тригонометричний ряд*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \text{ де}$$

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin nx dx.$$

Якщо функція $f(x)$ парна на $[-p; p]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \text{ де } a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos nx dx.$$

Якщо функція $f(x)$ непарна на $[-p; p]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ де } b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin nx dx.$$

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-l; l]$ має період $2l$ (l - довільне додатне число) і є на відрізку $[-l; l]$ кусково-диференційована. Тоді ряд Фур'є цієї функції має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{pnx}{l} + b_n \sin \frac{pnx}{l} \right), \text{ де}$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{pnx}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{pnx}{l} dx.$$

Якщо функція $f(x)$ парна на $[-l; l]$, то маємо

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{pnx}{l}, \text{ де}$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{pnx}{l} dx,$$

а якщо функція $f(x)$ непарна на $[-l; l]$, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{pnx}{l}, \text{ де } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{pnx}{l} dx.$$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 5

Тема 1. Звичайні диференціальні рівняння.

Література: [1], глава 13, § 3-8, 17, 18, 21, 24; [2], глава 8, § 1, 2, 4; [3], глава 8, § 1-4; [4], глава 8, § 25, 26 .

Для вивчення цієї теми студент повинен засвоїти основні означення: диференціального рівняння, його порядку, загального та частинного розв'язків. Треба вміти розпізнати тип диференціального рівняння: з відокремлюваними змінними, однорідне чи лінійне (для рівнянь першого порядку), рівняння, що допускають пониження порядку, чи лінійні зі сталими коефіцієнтами (для рівнянь другого порядку). А далі, володіючи методами інтегрування цих рівнянь, отримати загальний та частинний розв'язок.

Розглянемо приклади розв'язання диференціальних рівнянь.

Приклад 1. Знайти частинні та загальні розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку:

а) $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$; б) $3x^2(y+1)dx + (x^3+1)dy = 0$, $y(0) = 1$;

в) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$; г) $xdy - \frac{x}{e}y + xtg \frac{y}{x}dx = 0$;

д) $y' + 2xy = x^2 \times e^{-x^2}$.

Розв'язання

а) $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$.

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$,

$g(y) = y$. Тоді $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, або $x dy = y dx$.

Поділимо обидві частини рівняння на добуток $xy \neq 0$: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, а тепер інтегруємо обидві частини $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$, звідки $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$, або $y = x \times C$. Це загальний розв'язок нашого рівняння.

Використовуємо початкову умову, з якої $x_0 = 1, y_0 = 1$, для знаходження довільної сталої C . Для цього треба підставити $x_0 = 1, y_0 = 1$ в отриманий загальний розв'язок:

$$1 = 1 \times C, \text{ звідки } C = 1.$$

Для запису частинного розв'язку треба повернути знайдену довільну сталу в загальний розв'язок, тобто $y = x$ - є частинним розв'язком рівняння.

Перевіримо, чи не втрачені розв'язки при відокремленні змінних? Розв'язки $x = 0$ та $y = 0$ утворюються із загального розв'язку $y = x \times C$ при значенні $C = 0$, тому їх не треба виписувати окремо.

$$\text{б) } 3x^2(y+1)dx + (x^3+1)dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

Поділивши обидві частини цього рівняння на $(y+1)(x^3+1) \neq 0$, дістанемо рівняння:

$$\frac{3x^2}{x^3+1}dx + \frac{dy}{y+1} = 0,$$

інтегруючи яке, знайдемо загальний розв'язок:

$$\int \frac{3x^2 dx}{x^3+1} + \int \frac{dy}{y+1} = \ln C,$$

$$\ln|x^3+1| + \ln|y+1| = \ln C, \text{ звідки } (x^3+1)(y+1) = C.$$

Підставимо $x_0 = 0, y_0 = 1$: $C = 2$.

Тоді частинний розв'язок отримаємо в вигляді:

$$(x^3+1)(y+1) = 2.$$

$$в) \quad y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Перевіримо, чи є це рівняння однорідним.

Функція $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру,

бо $f(1x, 1y) = \frac{1x}{1y} + \frac{1y}{1x} = f(x, y)$. Робимо заміну $y = ux$, тоді $y' = u'x + u$

і отримаємо рівняння: $u'x + u = \frac{x}{ux} + \frac{ux}{x}$, або $u'x + u = \frac{1}{u} + u$, звідки

$u' = \frac{1}{ux}$ - це рівняння з відокремлюваними змінними.

Далі маємо, що $\frac{du}{dx} = \frac{1}{ux}$, звідки $ux du = dx$. Поділивши обидві частини останнього рівняння на $x \neq 0$, отримаємо:

$$u du = \frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування дістанемо, що $\int u du = \int \frac{dx}{x}$,

$$\frac{u^2}{2} = \ln x + C, \text{ тоді } u^2 = 2(\ln x + C).$$

Повертаючись до старих змінних $\frac{y^2}{x^2} = \frac{u^2}{1}$, отримаємо загальний розв'язок рівняння :

$$\frac{y^2}{x^2} = 2(\ln x + C), \text{ або } \frac{y^2}{x^2} = 2(\ln x + C).$$

$$г) \quad x dy - \frac{y}{x} y + xtg \frac{y}{x} dx = 0.$$

Перепишемо це рівняння у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + xtg \frac{y}{x}}{x}, \text{ або } y' = \frac{y}{x} + tg \frac{y}{x}.$$

Дійсно, функція $f(x, y) = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ - є функцією нульового виміру, бо

$$f(lx, ly) = \frac{ly}{lx} + \operatorname{tg} \frac{ly}{lx} = f(x, y).$$

Тобто маємо однорідне рівняння, в якому робимо заміну $y = u \times x$, тоді $y' = u'x + u$.

$$\text{Будемо мати: } u'x + u = \frac{ux}{x} + \operatorname{tg} \frac{ux}{x}, \text{ або } u'x + u = u + \operatorname{tgu}, \quad u'x = \operatorname{tgu},$$

$$\text{звідки } u' = \frac{\operatorname{tgu}}{x}.$$

Тоді $\frac{du}{dx} = \frac{\operatorname{tgu}}{x}$ і відокремлюючи змінні та інтегруючи, отримаємо загальний розв'язок рівняння:

$$\int \frac{du}{\operatorname{tgu}} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln C, \quad \text{звідки } \sin u = xC.$$

Повертаючись до старих змінних, маємо :

$$\sin \frac{y}{x} = xC \quad - \text{ загальний розв'язок рівняння.}$$

$$\text{д) } y' + 2xy = x^2 e^{-x^2}.$$

Маємо лінійне рівняння. Зробимо підстановку $y = uv$, звідки $y' = u'v + uv'$.

$$\text{Дістанемо: } u'v + uv' + 2xuv = x^2 e^{-x^2}.$$

Згрупувавши другий і третій доданки, отримаємо :

$$u'v + u(v' + 2xv) = x^2 e^{-x^2}.$$

Нехай $v' + 2xv = 0$. Тоді $\frac{dv}{dx} = -2xv$ - це рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\text{Тому будемо мати: } \int \frac{dv}{v} = - \int 2x dx, \quad \text{звідки } \ln|v| = -x^2,$$

$$\text{або } v = e^{-x^2}.$$

Далі знаходимо функцію u з рівняння $u' = x^2 e^{-x^2}$. Будемо мати:

$$u' e^{-x^2} = x^2 \times e^{-x^2},$$

$u' = x^2$ - теж рівняння з відокремленими змінними, з якого $u = \frac{x^3}{3} + C$.

Отже, $y = uv = \frac{x^3}{3} + C \cdot e^{-x^2}$ - це загальний розв'язок заданого рівняння.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь другого порядку, що допускають пониження порядку:

$$\text{а) } y'' = x^2 + \cos x; \quad \text{б) } xy' = y \ln \frac{y'}{x}; \quad \text{в) } (y - 1)y' = 2(y')^2.$$

Розв'язання

$$\text{а) } y'' = x^2 + \cos x.$$

Права частина рівняння не містить невідомої функції y та її похідної y' , тому для отримання розв'язку потрібно двічі послідовно проінтегрувати обидві його частини.

$$y' = \int (x^2 + \cos x) dx = \frac{x^3}{3} + \sin x + C_1,$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} + \sin x + C_1 \right) dx = \frac{x^4}{12} - \cos x + C_1 x + C_2.$$

$y = \frac{x^4}{12} - \cos x + C_1 x + C_2$ - загальний розв'язок даного рівняння.

$$\text{б) } xy' = y \ln \frac{y'}{x}.$$

Будемо мати: $y' = \frac{y \ln \frac{y'}{x}}{x}$. Права частина цього рівняння не містить

шуканої функції y , тому підстановка $y' = p(x)$, $y = p'(x)$ перетворює його на диференціальне рівняння першого порядку.

Дійсно $p' = \frac{p \ln p}{x}$. Це рівняння є однорідним, а тому покладаючи

$p = ux$, $p' = u'x + u$, будемо мати:

$$u'x + u = \frac{ux \ln \frac{ux}{x}}{x}, \quad u'x + u = u \ln u, \quad \text{звідки}$$

$$u'x = u(\ln u - 1), \quad u' = \frac{u(\ln u - 1)}{x}.$$

Розділяючи змінні, отримаємо: $\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}$.

Для обчислення інтеграла зліва використаємо підстановку:

$$t = \ln u - 1, \quad \text{тоді} \quad dt = \frac{du}{u}.$$

Отримаємо $\int \frac{dt}{t} = \int \frac{dx}{x}$, $\ln|t| = \ln|x| + \ln C_1$, $\ln|\ln u - 1| = \ln C_1 x$,

$$\ln u = 1 + C_1 x, \quad u = e^{1+C_1 x}.$$

Але ми поклали $p = ux$, звідки $u = \frac{p}{x}$. Отже $\frac{p}{x} = e^{1+C_1 x}$, $p = x \times e^{C_1 x+1}$.

Повернемося до старої змінної: $y' = p$, тому $y' = p$, $y' = x \times e^{C_1 x+1}$. Це нове диференціальне рівняння, про інтегруємо його:

$$\int dy = \int x \times e^{C_1 x+1} dx.$$

Для обчислення інтеграла справа використаємо інтегрування частинами. Дійсно

$$\begin{aligned} \int x \times e^{C_1 x+1} dx &= \int u = x \text{ } \int du = dx \\ \int dv &= e^{C_1 x+1} dx \text{ } \int v = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x+1} \int \frac{1}{x} = x \times \frac{1}{C_1} e^{C_1 x+1} dx - \\ &- \int \frac{1}{C_1} e^{C_1 x+1} dx = \frac{x}{C_1} e^{C_1 x+1} - \frac{1}{C_1^2} \times e^{C_1 x+1} + C_2. \end{aligned}$$

Повертаючись до рівняння, $y = \frac{x}{C_1} e^{C_1 x+1} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x+1} + C_2$ - загальний розв'язок наведеного рівняння.

$$в) (y - 1)y'' = 2(y')^2.$$

Як бачимо рівняння не містить явно незалежної змінної x , тому за допомогою підстановки $y' = p(y)$, $y'' = p' \times p$ воно зведеться до рівняння першого порядку.

$$\text{Отримаємо: } (y - 1) \times p' \times p = 2p^2, \text{ звідки } p' = \frac{2p}{y - 1} - \text{рівняння з}$$

відокремлюваними змінними.

$$\text{Будемо мати: } \frac{dp}{dy} = \frac{2p}{y - 1}, \text{ тоді } \frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y - 1}. \text{ Після інтегрування отримаємо:}$$

$$\ln \frac{dp}{p} = 2 \ln \frac{dy}{y - 1}, \quad \ln |p| = 2 \ln |y - 1| + \ln C_1, \quad p = C_1 (y - 1)^2.$$

$$\text{За підстановкою } y' = p, \text{ отже } y' = C_1 (y - 1)^2.$$

Знов розділяючи змінні та інтегруючи обидві частини рівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(y - 1)^2} &= \int C_1 dx, \\ -\frac{1}{y - 1} &= C_1 x + C_2, \quad y - 1 = -\frac{1}{C_1 x + C_2}, \\ y &= 1 - \frac{1}{C_1 x + C_2} - \text{загальний розв'язок рівняння.} \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$а) y'' + 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -7;$$

$$б) y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 9, \quad y'(0) = 8;$$

$$в) y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = 0.$$

Розв'язання

$$а) y'' + 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -7.$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 3k - 4 = 0.$$

Його корені $k_1 = 1$, $k_2 = -4$, тоді загальний розв'язок рівняння :

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}.$$

Знайдемо y' : $y' = C_1 e^x - 4C_2 e^{-4x}$.

Використаємо початкові умови :

$$\begin{cases} 3 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \\ 1 - 7 = C_1 e^0 - 4C_2 e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = C_1 + C_2 \\ 1 - 7 = C_1 - 4C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = 1. \end{cases}$$

Маємо частинний розв'язок рівняння або розв'язок задачі Коші:

$$y = e^x + 2e^{-4x}.$$

$$\text{б) } y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 9, \quad y'(0) = 8.$$

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 4k + 4 = 0, \quad \text{його корені } k_1 = k_2 = 2.$$

Тоді загальний розв'язок : $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$. Знайдемо y' :

$$y' = 2e^{2x}(C_1 + C_2 x) + e^{2x} \times C_2.$$

Підставимо початкові умови:

$$\begin{cases} 9 = e^0(C_1 + C_2 \times 0) \\ 8 = 2e^0(C_1 + C_2 \times 0) + e^0 \times C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 9 \\ C_2 = -10. \end{cases}$$

Розв'язок задачі Коші: $y = e^{-2x}(9 - 10x)$.

$$\text{в) } y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = 0.$$

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 4k + 5 = 0.$$

$$D = 16 - 4 \times 5 = -4,$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i \quad \Rightarrow \quad a = 2; \quad b = 1.$$

Загальний розв'язок: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Знайдемо y' :

$$y' = 2e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x} (-C_1 \sin x + C_2 \cos x).$$

Використовуючи початкові умови, отримаємо:

$$\begin{cases} 10 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \\ 0 = 2e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0 (-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 10 \\ C_2 = -20. \end{cases}$$

$$y = e^{2x} (10 \cos x - 20 \sin x) - \text{частинний розв'язок нашого рівняння.}$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\text{а) } y'' - 8y' + 16y = e^{4x}; \quad \text{б) } y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x.$$

Розв'язання:

$$\text{а) } y'' - 8y' + 16y = e^{4x}.$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = \bar{y} + y^*$, де \bar{y} - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' - 8y' + 16y = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 - 8k + 16 = 0$ має однакові корені $k_{1,2} = 4$, отже $\bar{y} = e^{4x} (C_1 + C_2 x)$.

Частинний розв'язок залежить від вигляду правої частини $f(x) = e^{4x}$ (маємо $k_{1,2} = 4$, $a = 4$, $n = 0$). Тоді $y^* = Ax^2 e^{4x}$.

Далі для знаходження A використаємо метод невизначених коефіцієнтів.

$$\text{Знайдемо } y^{*\prime} = 4Ax^2 e^{4x} + 2Axe^{4x},$$

$$y^{*\prime\prime} = 16Ax^2 e^{4x} + 8Axe^{4x} + 8Axe^{4x} + 2Ae^{4x}.$$

Після підстановки y^* , $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в наше рівняння отримаємо:

$$16Ax^2 e^{4x} + 16Axe^{4x} + 2Ae^{4x} - 8(4Ax^2 e^{4x} + 2Axe^{4x}) + 16Ax^2 e^{4x} = e^{4x}.$$

Приводячи подібні доданки, будемо мати:

$$2Ae^{4x} = e^{4x}, \text{ звідки } A = 1/2.$$

$$\text{Отже } y^* = 1/2 x^2 e^{4x}.$$

Тоді загальний розв'язок має вигляд :

$$y = e^{4x} (C_1 + C_2 x) + \frac{1}{2} x^2 e^{4x}, \text{ або } y = e^{4x} \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^2 \right).$$

$$\text{б) } y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x.$$

Пам'ятаючи про структуру загального розв'язку неоднорідного рівняння $(y = \bar{y} + y^*)$, знайдемо окремо його компоненти.

Для однорідного рівняння $y'' - 2y' + 2y = 0$ складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k + 2 = 0.$$

$$D = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0, \text{ тоді}$$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$\bar{y} = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Для частинного розв'язку y^* розглянемо праву частину рівняння $f(x) = e^x \sin x$. Отже, маємо $a = 1$; $b = 1$, $k_{1,2} = 1 \pm i = a \pm ib$, тобто $y^* = x e^x (A \cos x + B \sin x)$. Знайдемо першу та другу похідну цієї функції:

$$y^{*\prime} = e^x (A \cos x + B \sin x) + x e^x (A \cos x + B \sin x) + x e^x (-A \sin x + B \cos x),$$

$$\begin{aligned} y^{*\prime\prime} &= e^x (A \cos x + B \sin x) + e^x (-A \sin x + B \cos x) + e^x (A \cos x + B \sin x) + \\ &+ x e^x (A \cos x + B \sin x) + x e^x (-A \sin x + B \cos x) + e^x (-A \sin x + B \cos x) + \\ &+ x e^x (-A \sin x + B \cos x) + x e^x (-A \cos x - B \sin x) = \\ &= 2e^x (A \cos x + B \sin x) + 2e^x (-A \sin x + B \cos x) + 2x e^x (-A \sin x + B \cos x). \end{aligned}$$

Підставимо y^* , $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в початкове рівняння:

$$\begin{aligned} &2e^x (A \cos x + B \sin x - A \sin x + B \cos x - x A \sin x + x B \cos x) - \\ &- 2e^x (A \cos x + B \sin x + x A \cos x + B \sin x - x A \sin x + x B \cos x) + \\ &+ 2e^x (x A \cos x + x B \sin x) = e^x \sin x, \text{ звідки } -A \sin x + B \cos x = \frac{1}{2} \sin x. \end{aligned}$$

Зрівняємо коефіцієнти при $\sin x, \cos x$ в обох частинах рівняння.

Отже, $A = -\frac{1}{2}$; $B = 0$, і частинний розв'язок рівняння має вигляд:
 $y^* = -\frac{1}{2}xe^x \cos x$.

Тоді $y = e^x \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right)$ - загальний розв'язок нашого рівняння.

Тема 2. Подвійні та криволінійні інтеграли

Література: [1], глава 14, § 1-7, глава 15, § 1-4; [2], глава 10, § 1,3; [3], глава 10, § 1.

Розглядаючи цю тему, треба зосередити увагу на обчисленні подвійного інтеграла за допомогою зведення його до повторного інтеграла. При цьому важливо вірно розставити границі інтегрування, для чого потрібно знайти та накреслити область інтегрування. Також треба вміти обчислювати безпосередньо повторні інтеграли.

В задачах на знаходження площі плоскої фігури, по-перше, треба зробити малюнок самої області, площу котрої треба обчислити, а потім звести подвійний інтеграл до повторного, зробив розстановку границь інтегрування, та обчислити його.

Знайомлячись з криволінійними інтегралами, треба засвоїти їх означення, вміло розрізняти інтеграли по довжині дуги (першого роду) від інтегралів по координатам (другого роду) та знати властивості цих інтегралів.

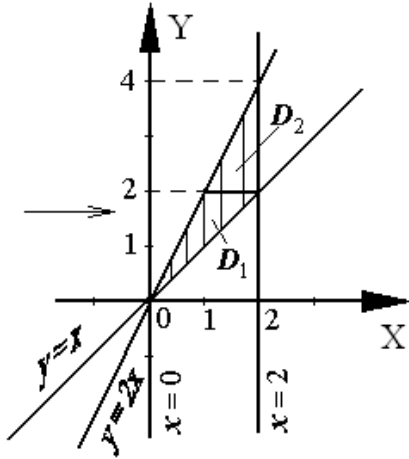
Розглянемо приклади.

Приклад 1. Змінити порядок інтегрування у повторних інтегралах:

а) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$;

б) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$.

Розв'язання:



а) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$.

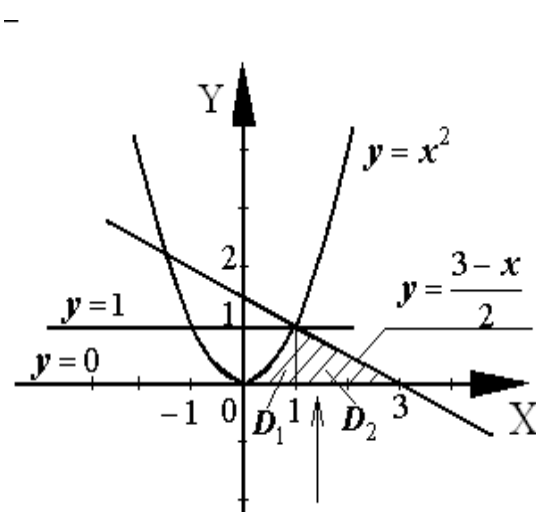
Спочатку випишемо область $D: 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2x$, побудуємо її. Проектуємо область на ось OY , бачимо, що її доведеться розбивати на суму двох областей D_1 і D_2 .

Тоді для $D_1: \frac{y}{2} \leq x \leq y, 2 \leq y \leq 4$, $D_2: \frac{y}{2} \leq x \leq 2, \frac{y}{2} \leq y \leq 2$.

Будемо тепер мати :

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx.$$

б) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$.



Випишемо область $D: 0 \leq y \leq 1,$

$$\sqrt{y} \leq x \leq 3-2y.$$

Будуємо дві прямі $y=0, y=1$.

та параболу $x=\sqrt{y} \quad (x^2=y)$

з прямою $x=3-2y$ $\frac{3-x}{2} = y$.

Теж доведеться розбити область D на суму областей D_1 і D_2 , для

яких матимемо: $D_1: \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{matrix}, \quad D_2: \begin{matrix} 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq \frac{3-x}{2} \end{matrix}.$

Тоді
$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy.$$

Приклад 2. Обчислити подвійні інтеграли по заданій області:

а) $\iint_D (x - y) dx dy, \quad D: \quad 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2;$

б) $\iint_D x^2 y dx dy, \quad D: \quad y = x^2, y + x = 2;$

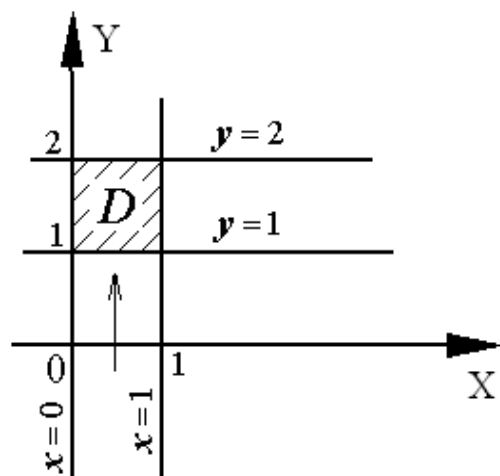
в) $\iint_D \frac{3x}{y} dx dy, \quad D: \quad y = 2x, x + y = 3, y = 1.$

Розв'язання :

а) $\iint_D (x - y) dx dy, \quad \text{де } D: \quad 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2.$

Побудуємо область D . Вона є правильною як відносно осі OY , так і осі OX , тому користуємося формулою :

$$\iint_D (x - y) dx dy = \int_a^b dx \int_{j_1(x)}^{j_2(x)} (x - y) dy.$$



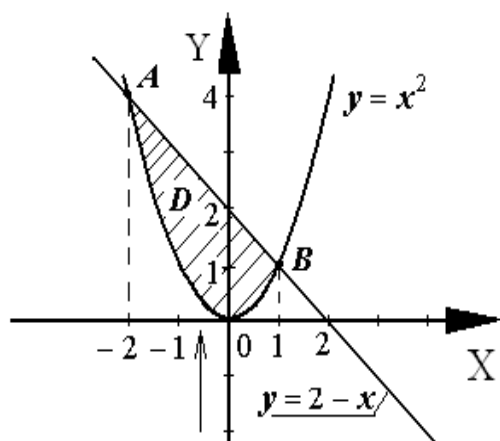
Для того, щоб знайти границі у повторному інтегралі виберемо напрямок входу в область знизу уверх. Тоді точка входу в область знаходиться на лінії $y = 1$, а точка виходу з області – на лінії $y = 2$. Ці значення і будуть границями внутрішнього інтеграла. А для зовнішнього інтеграла слід назвати, як змінюється x : $0 \leq x \leq 1$. Одержимо, що

$$\iint_D (x - y) dx dy = \int_0^1 dx \int_1^2 (x - y) dy = \int_0^1 dx \times \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 \right]_1^2 =$$

$$= \int_0^1 dx \times \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 \right]_1^2 = \int_0^1 dx \times \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} (4 - 1) \right]_1^2 =$$

$$= \int_0^1 dx \times \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} \right]_1^2 = \int_0^1 x dx - \frac{3}{2} \int_0^1 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} x \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1.$$

б) $\iint_D x^2 y dx dy$, де $D: y = x^2, y + x = 2$;



Побудуємо область D . Вона є правильною відносно осі OY . Координати точок перетину параболи з прямою визначимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x \end{cases} \text{ Р } x^2 = 2 - x,$$

тобто $x^2 + x - 2 = 0$, звідки $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Тоді $y_1 = 4$, $y_2 = 1$. Отримали, що $A(-2; 4)$, $B(1; 1)$.

Знов, входячи в область знизу, матимемо, що точка входу в область попаде на параболу ($y = x^2$), а точка виходу – на пряму $y = 2 - x$, тобто $x^2 \leq y \leq 2 - x$. А границі змінювання x для нашої області співпадають з абсцисами точок A і B , тобто $-2 \leq x \leq 1$. Тоді маємо, що

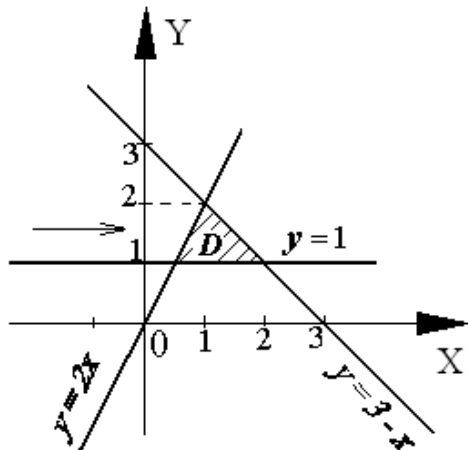
$$\iint_D x^2 y dx dy = \int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} x^2 y dy = \int_{-2}^1 dx \times x^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^{2-x} = \int_{-2}^1 dx \times x^2 \times \left[\frac{1}{2} (2-x)^2 - \frac{1}{2} x^4 \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^1 dx \times x^2 \times \frac{(2-x)^2}{2} - \frac{x^4}{2} = \frac{1}{2} \int_{-2}^1 dx \times x^2 [4 - 4x + x^2 - x^4] = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-2}^1 [4x^2 - 4x^3 + x^4 - x^6] dx = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \right]_{-2}^1 = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \left(\frac{32}{3} - 16 - \frac{32}{5} + \frac{128}{7} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{32}{3} + 16 - \frac{32}{5} + \frac{128}{7} \right] = \frac{1}{2} \times \frac{531}{35} = \frac{531}{70}.
\end{aligned}$$

в) $\iint_D \frac{3x}{y} dx dy$, де $D: y = 2x, x + y = 3, y = 1$.

Для побудови області D знайдемо точку перетину прямих

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} y = 2x \\ y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow 2x = 3 - x, \text{ звідки } 3x = 3, \quad x = 1. \text{ Тоді } y = 2.
\end{aligned}$$



Для обчислення подвійного інтеграла скористаємося формулою для випадку, коли область D є правильною в напрямі осі OX .

Вибираємо напрямок входу в область зліва направо. Тоді точка входу попаде на лінію $y = 2x$, а точка виходу – на лінію $y = 3 - x$. Виражаючи в рівняннях ліній x через y , добудемо

границі змінювання x внутрішнього інтеграла: $\frac{y}{2} \leq x \leq 3 - y$. Для зовнішнього інтеграла границі змінювання y будуть такими: від ординати точок прямої $y = 1$ до ординати точки A , тобто $1 \leq y \leq 2$.

$$\text{Тоді } \iint_D \frac{3x}{y} dx dy = \int_1^2 dy \int_{y/2}^{3-y} \frac{3x}{y} dx = \int_1^2 \frac{dy}{y} \int_{y/2}^{3-y} 3x dx = \int_1^2 \frac{dy}{y} \times \frac{3}{2} x^2 \Big|_{y/2}^{3-y} =$$

$$= \frac{3^2}{2} \frac{dy}{y} \times \frac{\dot{e}}{\ddot{e}} (3 - y)^2 - \frac{y^2 \ddot{u}}{4 \dot{u}} = \frac{3^2}{2} \frac{dy}{y} \times \frac{\dot{e}}{\ddot{e}} 9 - 6y + y^2 - \frac{y^2 \ddot{u}}{4 \dot{u}} = \frac{3^2}{2} \frac{\dot{e}}{\ddot{e}} 9 - 6y + \frac{3}{4} y^2 \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} \times \frac{dy}{y} =$$

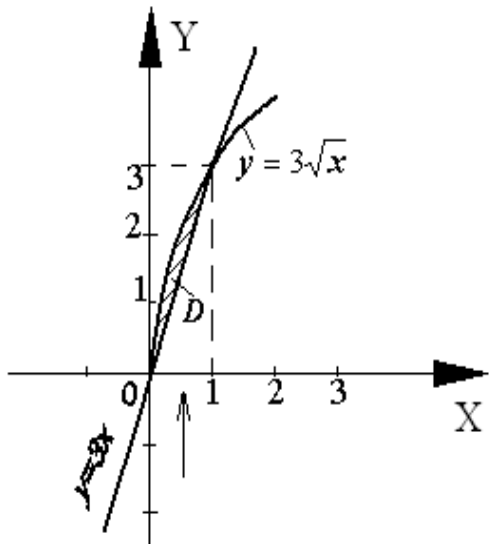
$$= \frac{3^2 \dot{e} 9}{2 \dot{0} \hat{e} y} - 6 + \frac{3}{4} y \frac{\dot{u}}{\hat{u}} dy = \frac{3 \dot{e} 9 \ln y}{2 \hat{e}} - 6y + \frac{3}{8} y^2 \frac{\dot{u}}{\hat{u}} \Big|_1^2 = \frac{3 \dot{e} 9 \ln 2}{2 \hat{e}} - 12 + \frac{3}{2} - 9 \ln 1 + 6 - \frac{3 \dot{u}}{8 \hat{u}} =$$

$$= \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{39}{8} = \frac{27}{2} \ln 2 - \frac{117}{16}.$$

Приклад 3. Обчислити площі областей, обмежених заданими лініями: а) $y = 3\sqrt{x}$, $y = 3x$; б) $x = y^2 - 2y$, $x - y = 0$.

Розв'язання:

a) $y = 3\sqrt{x}$, $y = 3x$.



Спочатку побудуємо область D .

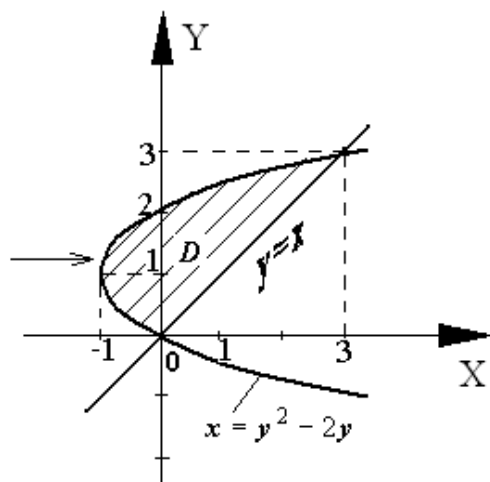
За формулою знаходимо

$$S = \iint_D dx \, dy = \int_0^1 (3\sqrt{x} - 3x) dx =$$

$$= \int_0^1 3\sqrt{x} \, dx - \int_0^1 3x \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{3}{2} x^2 \right]_0^1 =$$

$$\left. \frac{d}{dt} 2x^{3/2} - \frac{3}{2} x^2 \ddot{x} \right|_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

б) $x = y^2 - 2y, \quad x - y = 0.$



Для побудови області D знайдемо точки перетину параболи $x = y^2 - 2y$ з прямою $x - y = 0$. Із системи

$$\begin{cases} x = y^2 - 2y \\ x = y \end{cases} \quad \text{маємо } y = y^2 - 2y, \text{ звідки}$$

$y^2 - 3y = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 3$. Тоді абсциси точок перетину ліній : $x_1 = 0, \quad x_2 = 3$. Вершина параболи лежить у точці $(-1; 1)$.

$$\begin{aligned} \text{Знаходимо } S &= \iint_D dx dy = \int_0^3 \int_{y^2-2y}^y dx dy = \int_0^3 (y - y^2 + 2y) dy = \\ &= \int_0^3 (3y - y^2) dy = \left[\frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2} = 4,5. \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити криволінійні інтеграли вздовж заданих ліній інтегрування :

а) $\int_L (x - y) dl$, де L - відрізок прямої $y = 2x - 3$ між точками $A(0; -3)$ і $B(3; 3)$;

б) $\int_L x^2 y dl$, де L - частина кола $x^2 + y^2 = R^2$, яка розташована у першому квадратні ;

в) $\int_L y^2 dx + 2xy dy$, де L - дуга кривої $y = x^2$ від $A(0; 0)$ до $B(1; 1)$;

г) $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, де L - верхня половина еліпса $x = a \cos t, \quad y = b \sin t$ по ходу годинникової стрілки.

Розв'язання :

а) $\int_L (x - y) dl$, де L - відрізок прямої $y = 2x - 3$ між точками

$A(0; -3)$ і $B(3; 3)$;

Маємо криволінійний інтеграл першого роду, для обчислення котрого скористаємося формулою у декартовій системі координат. Маємо

$$j(x) = 2x - 3, \quad a = 0, \quad b = 3. \text{ Знайдемо } dl = \sqrt{1 + j'^2} dx = \sqrt{1 + 4} dx = \sqrt{5} dx.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_L (x - y) dl &= \int_0^3 [x - (2x - 3)] \times \sqrt{5} dx = \sqrt{5} \int_0^3 (3 - x) dx = \sqrt{5} \left[3x - \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \\ &= \sqrt{5} \left(9 - \frac{9}{2} \right) = \frac{9\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

б) $\int_L x^2 y dl$, де L - частина кола $x^2 + y^2 = R^2$, яка розташована у

першому квадратні ;

Для обчислення цього криволінійного інтеграла першого роду задамо дугу кола параметричними рівняннями $x = R \cos t$, $y = R \sin t$,

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ і скористуємося другою формулою. Знайдемо $x' = -R \sin t$,

$y' = R \cos t$, тоді

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = \sqrt{R^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = R dt.$$

Будемо мати:

$$\int_L x^2 y dl = \int_0^{\pi/2} (R \cos t)^2 \times R \sin t \times R dt = R^4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t dt =$$

$$= -R^4 \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{R^4}{3} \left(\cos^3 \frac{\pi}{2} - \cos^3 0 \right) = -\frac{R^4}{3} (0 - 1) = \frac{R^4}{3}.$$

в) $\int_L y^2 dx + 2xy dy$, де L - дуга кривої $y = x^2$ від $A(0; 0)$ до $B(1; 1)$;

Маємо криволінійний інтеграл другого роду у випадку, коли крива задається явно. Знайдемо $y^2 = 2x$, $a = 0$, $b = 1$. Тоді

$$\int_L y^2 dx + 2xy dy = \int_0^1 (x^2)^2 + 2x \times x^2 \times 2x^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 5x^4 dx = x^5 \Big|_0^1 = 1^5 - 0^5 = 1.$$

г) $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, де L - верхня половина еліпса $x = a \cos t$,

$y = b \sin t$ по ходу годинникової стрілки.

Перетворимо цей криволінійний інтеграл другого роду у визначений інтеграл, користуючись формулою для його обчислення в параметричній системі координат.

Знайдемо $x^2 = -a \sin t$, $y^2 = b \cos t$, параметр t змінюється від π до 0 .

$$\begin{aligned} \text{Маємо: } \int_L y^2 dx + x^2 dy &= \int_{\pi}^0 [b^2 \sin^2 t \times (-a \sin t) + a^2 \cos^2 t \times b \cos t] dt = \\ &= - \int_{\pi}^0 b^2 a (1 - \cos^2 t) \sin t dt + \int_{\pi}^0 a^2 b (1 - \sin^2 t) \cos t dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \int_{\pi}^0 b^2 a (1 - \cos^2 t) \sin t dt &= \left| \begin{array}{l} \cos t = z \\ - \sin t dt = dz \\ t = \pi; \quad z = -1 \\ t = 0; \quad z = 1 \end{array} \right| = b^2 a \int_{-1}^1 (1 - z^2) dz = b^2 a \left[z - \frac{z^3}{3} \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{4}{3} ab^2. \end{aligned}$$

$$\int_{\pi}^0 a^2 b (1 - \sin^2 t) \cos t dt = \left| \begin{array}{l} \sin t = z \\ \cos t dt = dz \\ t = \pi; \quad z = 0 \\ t = 0; \quad z = 0 \end{array} \right| = 0.$$

Шуканий інтеграл $\int_{(AB)} y^2 dx + x^2 dy = \frac{4}{3} ab^2$.

Завдання до контрольної роботи № 5

1. Завдання. Знайти частинний та загальний розв'язки диференціальних рівнянь:

1. a) $y' + xy = \frac{4x}{y}, y(0) = 1;$

$$6) \quad (y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0;$$

B) $y \cos x - y \sin x = \cos^2 x.$

2. а) $(xy^2 - y^2)dx - (x^2y + x^2)dy = 0, y(1) = 1;$ б) $xy' = y^{\frac{x}{e}} + \ln \frac{y}{x} \ddot{0};$

B) $x^2 y \dot{c} + xy + 1 = 0.$

$$3. \quad \text{a) } x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0, \quad y(0) = 1; \quad \text{б) } y' = 4 + \frac{y}{x} + \frac{xy''}{x^2};$$

B) $y' + y \cos x = \sin 2x$.

4. a) $xydx + (x + 1)dy = 0, y(0) = 2;$

$$6) \quad (y + \sqrt{xy}) dx = x dy ;$$

B) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin 2x}{x}$.

5. a) $2x^2yy' + y^2 = 2, y(1) = 1;$

$$6) \quad xy' - y = \sqrt{y^2 + 4x^2};$$

B) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3.$

6. a) $\ln \cos y dx + x \operatorname{tg} y dy = 0, y(1) = 0;$

$$6) \quad y_{\zeta} = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} ;$$

B) $y' + x^2 y = x^2$.

7. a) $2xy \dot{c} - x = 3x^2, \quad y(1) = 3;$

$$6) \quad y \zeta = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy};$$

B) $y \cdot \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$.

8. а) $e^{x^3} dy + 3x^2 \sqrt{1 - y^2} dx = 0, y(0) = 0;$

б) $xy' = 2x + 5y;$

в) $xy' - y = x^2 \sin x.$

9. а) $y' \ln x - \operatorname{tg} y = 0, y(1) = 0;$

б) $x dy - \frac{x}{y} y + x \cos \frac{y}{x} dx = 0;$

в) $(2x + 1)y' + y = x.$

10. а) $x^2(y^3 + 5)dx + (x^3 + 5)y^2 dy = 0, y(0) = 1;$

б) $xy' = y - xe^{y/x};$

в) $xy' + y = \ln x + 1.$

2. Завдання. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

1. а) $y' = x \sin x;$ б) $y' \ln x = y';$ в) $2y y' = (y')^2.$

2. а) $y' = \sin^2 3x;$ б) $y' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1);$ в) $2y y' = (y')^2 - y^2.$

3. а) $y' = x^2 \ln x;$ б) $xy' - y' = 0;$ в) $y'^3 = 1.$

4. а) $y' = \sqrt{2x+5} - 3x;$ б) $xy' + y' + x = 0;$ в) $y' = y' + (y')^2.$

5. а) $y' = \frac{\ln x}{x^2};$ б) $y' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x;$ в) $y' \times y^2 = -9.$

6. а) $y' \times \sin^4 x = \sin 2x;$ б) $x^2 y' + xy' = 1;$ в) $2yy' + (y')^2 + (y')^4 = 0.$

7. а) $y' = e^{-2x};$ б) $y' - 2 \operatorname{ctg} x \times y' = \sin^3 x;$ в) $1 + (y')^2 = 2y y'.$

8. а) $y' = \cos 2x + \frac{1}{x};$ б) $xy' = y' \ln \frac{y'}{x};$ в) $2yy' - 3(y')^2 = 4y^2.$

9. а) $y' = e^{5x} - x^3;$ б) $xy' + y' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$ в) $y' = \frac{y'}{\sqrt{y}}.$

10. а) $y' = \frac{2}{x^3} - 5 \sin 7x;$ б) $(1+x^2)y' + 2xy' = x^3;$ в) $y'(1+y) = 5(y')^2.$

3. Завдання. Знайти частинний та загальний розв'язки диференціальних рівнянь:

1. а) $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -5$;

б) $y'' + 16y = xe^{4x}$;

в) $y'' - 100y = -125 \sin 5x$.

2. а) $y'' + y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;

б) $y'' + 7y' + 10y = 5x^2 + 1$;

в) $y'' + 5y = 2 \cos 3x$.

3. а) $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$;

б) $y'' + 4y = 4e^{2x}$;

в) $y'' - y' = 2 \cos x - \sin x$.

4. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$;

б) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$;

в) $y'' - y = 3 \cos x + 2 \sin x$.

5. а) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -3$;

б) $y'' + 9y = 3x^2 + 2x + 5$;

в) $y'' - 7y' + 6y = 3 \cos 2x$.

6. а) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

б) $y'' - 5y' = 4x^2 - 2x$;

в) $y'' - 4y = e^{2x} \cos x$.

7. а) $y'' - 6y' + 8y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 24$;

б) $y'' + 5y' = e^{-5x} (2x + 3)$;

в) $y'' + 4y = 3 \cos 2x$.

8. а) $y'' - y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 4$;

б) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x} (3x + 2)$;

в) $y'' + 9y = 2 \sin 2x$.

9. а) $y'' - 5y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;

б) $y'' + 4y' + 5y = e^{3x}$;

в) $y'' - 25y = 5 \cos 5x$.

10. а) $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -6;$

б) $y'' - 9y' + 8y = e^{4x}(4x + 6);$ в) $y'' + 16y = 4\sin 5x.$

4. Завдання. Змінити порядок інтегрування у повторних інтегралах:

1. $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

2. $\int_0^1 dx \int_{2x^2}^{3-x} f(x, y) dy.$

3. $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$

4. $\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dx.$

5. $\int_0^4 dx \int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$

6. $\int_0^1 dx \int_{x^2+2}^{4-x} f(x, y) dy.$

7. $\int_1^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx.$

8. $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy.$

9. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dy.$

10. $\int_{-1}^0 dx \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

5. Завдання. Обчислити подвійні інтеграли по заданій області :

1. $\iint_D (x - y) dx dy, \quad D: y = 0, \quad y = x, \quad y + x = 2.$

2. $\iint_D xy dx dy, \quad D: y = x, \quad y = 0, \quad x = 5.$

3. $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy, \quad D: x = y^2, \quad x = 0, \quad y = 1.$

4. $\iint_D xy dx dy, \quad D: y = x^2, \quad y = 2x.$

5. $\iint_D (x + y) dx dy, \quad D: y = x, \quad y^2 = x.$

6. $\iint_D \frac{y}{x} dx dy, \quad D: \quad x = y^2, \quad y = x^2.$
7. $\iint_D x^2 y dx dy, \quad D: \quad y = x^2, \quad x + y = 2.$
8. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D: \quad y = 0, \quad y = x, \quad x = 1.$
9. $\iint_D xy dx dy, \quad D: \quad y^2 = 2x, \quad x = 2.$
10. $\iint_D (3x + y) dx dy \quad D: \quad y = 2x, \quad x + y = 3, \quad x = 0.$

6. Завдання. Обчислити площі областей, обмежених заданими лініями:

1. $y = 1 + x, \quad y^2 = 1 - x.$
2. $y^2 = 4x, \quad x + y = 3, \quad y = 0.$
3. $xy = 4, \quad x + y = 5.$
4. $y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad x = 4.$
5. $y = 9 - x^2, \quad y = -4x.$
6. $y = \frac{4}{x}, \quad y = 4\sqrt{x}, \quad x = 5.$
7. $y^2 = 4 + x, \quad x + 3y = 0.$
8. $y = 4 - x^2, \quad 3x - 2y - 6 = 0.$
9. $y = x^2 + 2, \quad y = 6.$
10. $y = x^2, \quad y = x + 2.$

7. Завдання. Обчислити криволінійні інтеграли вздовж заданих ліній інтегрування:

1. а) $\int_L (3x + y) dl, \quad \text{де } L - \text{ відрізок прямої } 3x + 2y - 1 = 0$
між точками $A(1; -1)$ і $B(3; -4)$;
- б) $\int_L y dx + x^2 dy, \quad \text{де } L - \text{ дуга лінії } y = x^2 \text{ від точки } A(2; 4)$
до точки $B(1; 1)$.

2. а) $\oint_L xy dl$, де L - верхня половина кола $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$;
 б) $\oint_L 2y^2 dx - x dy$, де L - дуга лінії $y = -x^2$ від точки $A(2; -4)$ до точки $B(1; -1)$.
3. а) $\oint_L (3y + x^2) dl$, де L - відрізок прямої $2x + 5y + 3 = 0$ між точками $A(1; -1)$ і $B(6; -3)$;
 б) $\oint_L x^2 y dy - y^2 x dx$, де L - дуга лінії $\begin{cases} x = \sqrt{\cos t} \\ y = \sqrt{\sin t} \end{cases}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
4. а) $\oint_L \sqrt{2y} dl$, де L - дуга лінії $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases}$, $0 \leq t \leq \sqrt{3}$;
 б) $\oint_L y dx + 4xy dy$, де L - дуга лінії $y = \sqrt{x}$ від точки $A(1; 1)$ до точки $B(9; 3)$.
5. а) $\oint_L (3y - x) dl$, де L - дуга лінії $y = x^3$ між точками $A(-2; -8)$ і $B(1; 1)$;
 б) $\oint_L y dx + x dy$, де L - чверть кола $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
6. а) $\oint_L y^2 dl$, де L - дуга лінії $\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \sin t - \cos t \end{cases}$, $0 \leq t \leq \pi$;
 б) $\oint_L y dx + 3^x dy$, де L - дуга лінії $y = 3^x$ між точками $A(0; 1)$ і $B(1; 3)$.

7. а) $\oint_L (yx + 2y)dl$, де L - відрізок прямої $5x + 3y - 15 = 0$
між точками $A(3;0)$ і $B(0;5)$;
- б) $\oint_L (2x - y^2)dx + 8ydy$, де L - верхня половина еліпса $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$
проти стрілки годинника $(0 \leq t \leq \pi)$.
8. а) $\oint_L \frac{x^2}{\sqrt{y}}dl$, де L - дуга параболи $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = 4t \end{cases}$, $0 \leq t \leq \frac{1}{8}$;
- б) $\oint_L ydx + 2xdy$, де L - дуга лінії $y = \sin x$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(\pi;0)$.
9. а) $\oint_L (xy + 3x)dl$, де L - відрізок прямої $4x - 3y + 6 = 0$
між точками $A(0;2)$ і $B(3;6)$;
- б) $\oint_L xdy - ydx$, де L - дуга лінії $\begin{cases} x = t^2 + 3t \\ y = 1 - t^3 \end{cases}$, $0 \leq t \leq 1$.
10. а) $\oint_L \sqrt{y} dl$, де L - перша арка циклоїди $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- б) $\oint_L y^2dx + 3xydy$, де L - дуга параболи $y = -3x^2$ від
точки $A(-2;-12)$ до точки $B(1;-3)$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 6

Тема: Ряди

Література: [1], глава 16, 17; [2], глава 9, § 1-3; [3], глава 9, § 1-3; [4], глава 5, § 14, 15.

Розглядання цієї теми треба почати із знайомства з числовими рядами, які бувають додатними та знакопочережними. Для таких рядів варто навчитися виявляти збігається ряд чи розбігається, а це можна зробити, застосовуючи необхідну та достатні умови збіжності.

Далі треба перейти до функціональних та степеневих рядів. Окрім означень радіуса, інтервалу та області їх збіжності, завдання полягає в тому, щоб вміти знайти радіус збіжності чи записати інтервал збіжності, або область.

Варто помітити, що степеневі ряди знаходять застосування в різних питаннях як наближених обчислень, так і в наближених методах аналізу. За допомогою рядів Тейлора і Маклорена, як різновидів степеневих рядів, складають таблиці значень функцій, розв'язують диференціальні рівняння та обчислюють наближені значення визначених інтегралів.

Для подальшого вивчення рядів треба познайомитися з тригонометричними рядами, які мають застосування до вивчення періодичних процесів, на прикладі рядів Фур'є. Причому умови, які накладаються на функцію при розкладі її в ряд Фур'є, значно простіші, ніж при розкладі її в степеневий ряд. Якщо функція розкладається, наприклад, в ряд Тейлора, то вона на всьому інтервалі збіжності є не тільки неперервною, а й скільки завгодно разів диференційованою. А для розкладу функції в ряд Фур'є достатньо лише, щоб функція була неперервною або навіть мала на відрізок скінчене число точок розриву першого роду. З цього випливає, що тригонометричні ряди є зручним інструментом для дослідження широкого класу функцій.

Перейдемо до детального знайомства з рядами.

Розглянемо приклади на дослідження збіжності числових рядів.

Приклад 1. Дослідити ряд на збіжність, застосовуючи необхідну умову збіжності

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+4}.$$

Розв'язання :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^{\frac{1}{n}}}{(3n+4)^{\frac{1}{n}}} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Ряд розбігається.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряди, застосовуючи ознаку Даламбера:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^2}.$$

Розв'язання :

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}.$$

$$\text{Для даного ряду } u_n = \frac{2n+1}{3^n}, \quad u_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{3^{n+1}} = \frac{2n+3}{3^{n+1}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3) \times 3^n}{3^{n+1} \times (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3(2n+1)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^{\frac{1}{n}}}{(6n+3)^{\frac{1}{n}}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} < 1.$$

Тому що $l = \frac{1}{3} < 1$, ряд збігається.

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^2}.$$

$$u_n = \frac{(2n)!}{n^2}, \quad u_{n+1} = \frac{(2 \times (n+1))!}{(n+1)^2} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)! n^2}{(n+1)^2 \times (2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2n (2n+1) (2n+2) n^2}{(n+1)^2 \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) \times (2n+2) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \infty.$$

Ряд розбігається.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряди Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Розв'язання :

1) Нехай $p = 1$, тоді маємо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln|b| - \ln|1|) = \infty.$$

За інтегральною ознакою Коші ряд розбігається.

2) Нехай $p \neq 1$, $f(x) = \frac{1}{x^p}$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{якщо } p > 1 \\ \infty, & \text{якщо } p < 1 \end{cases}.$$

Тобто $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ збігаються при $p > 1$, розбігаються при $p \leq 1$.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряди, застосовуючи граничну ознаку порівняння :

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+n}.$$

Розв'язання :

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-3}$. Розглянемо ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який розбігається то-

му що $p = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(4n-3)^k} \times \frac{n}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)^k}{(4n-3)^k} = \frac{1}{4^k}.$$

Якщо $k = \frac{1}{4}$, то ці два ряди еквівалентні. Ряд розбігається.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+n}$. Розглянемо ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який збіга-

ється, тому що $p = 2 > 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{(n^3+n)} \times \frac{n^2}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n^2}{n^3+n} = 1.$$

Якщо $k = 1$, то ряди еквівалентні. Ряд збігається.

Приклад 5. Дослідити на збіжність знакопозначені ряди :

а) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-2} + \dots$;

б) $-\frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} + \dots$;

в) $\frac{2}{3} - \frac{5}{9} + \frac{8}{15} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{3n-1}{6n-3} + \dots$.

Розв'язання :

а) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-2} + \dots$.

Ознака Лейбніца дає :

1. $1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{7} > \dots$;

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n-2} = 0$. Що означає, що ряд збігається.

Досліджуємо ряд, складений з абсолютних величин $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{3n-2} + \dots$

Розглянемо ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, що розбігається.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n-2} \times \frac{n}{1} = \frac{1}{3}.$$

За граничною ознакою порівняння цей ряд розбігається.

Знакопочережний ряд умовно збіжний.

б) За ознакою Лейбніца ряд збігається, тому що:

$$1) \frac{1}{1!} > \frac{1}{3!} > \frac{1}{5!} > \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)!} = 0.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$ досліджуємо за ознакою Даламбера.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2(n+1)-1)!} \times \frac{(2n-1)!}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots (2n-1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots (2n-1)(2n)(2n+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0 < 1. \text{ Ряд збігається.} \end{aligned}$$

Знакопочережний ряд абсолютно збігається.

в) За ознакою Лейбніца :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{6n-3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq 0, \text{ тому ряд розбігається.}$$

Приклад 6. Знайти радіус збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \times x^n}{4^n}$.

Розв'язання :

Так як $a_n = \frac{n}{4^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{4^{n+1}}$, то радіус збіжності дорівнює

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4^n} \times \frac{4^{n+1}}{n+1} = 4 \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 4 \times 1 = 4.$$

Приклад 7. Знайти інтервал збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{2^n(3n+1)}$.

Розв'язання :

Знаходимо радіус збіжності степеневому ряду, для якого

$$a_n = \frac{1}{2^n(3n+1)}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(3n+4)}.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n (3n+1)} \times \frac{2^{n+1} (3n+4)}{1} = 2 \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{3n+1} = 2 \times 1 = 2.$$

Тоді інтервал збіжності можна знайти із нерівності:

$$-2 < x - 4 < 2, \quad 2 < x < 6.$$

Таким чином, $(2, 6)$ - інтервал збіжності степеневого ряду.

Приклад 8. Визначити область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \times 7^n}.$$

Розв'язання :

У нашому прикладі $a_n = \frac{1}{n \times 7^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) 7^{n+1}}$, маємо

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \times 7^n} : \frac{1}{(n+1) 7^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) 7^{n+1}}{n \times 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) 7}{n} = 7.$$

Це означає, що даний ряд збігається при $|x| < 7$, тобто інтервал збіжності - $10 < x < 10$.

Дослідимо тепер поведінку ряду в точках $x_1 = 7$ і $x_2 = -7$. Підставимо в даний ряд замість x значення 7. Одержимо ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $p = 1$. Значить ряд розбігається.

При $x_2 = -10$ дістанемо числовий знакопозначений ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

Досліджуємо його за ознакою Лейбніца.

$$1) \quad 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ збігається. Областю збіжності даного ряду є $[-7; 7)$.

Приклад 9. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{3^{n-1} \times (n+1)}.$$

Розв'язання:

Скористаємося ознакою Даламбера для знакододатних рядів. Ряд буде збіжним, якщо виконується умова :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1.$$

Для заданого ряду : $u_n = \frac{x^{2n+1}}{3^{n-1} \times (n+1)}$; $u_{n+1} = \frac{x^{2n+3}}{3^n \times (n+2)}$.

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{3^n (n+2)} \times \frac{3^{n-1} \times (n+1)}{x^{2n+1}} \right| = \frac{x^2}{3} < 1.$

Інтервал збіжності знаходиться із нерівності $x^2 < 3$. Він має вигляд : $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

Дослідимо функціональний ряд на збіжність на кінцях інтервалу.

При $x = -\sqrt{3}$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1} (\sqrt{3})^{2n+1}}{3^{n-1} \times (n+1)} = 3\sqrt{3} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$

Для дослідження збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ скористаємося граничною ознакою порівняння :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{1} = 1 \neq 0 \neq \infty.$$

Таким чином, при $x = -\sqrt{3}$ ряд розбігається. При $x = \sqrt{3}$ маємо ряд $3\sqrt{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, який за граничною ознакою порівняння розбігається.

Таким чином, областю збіжності ряду є інтервал $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

Приклад 10. Розвинути в ряд Тейлора функцію $y = \frac{1}{x^2}$ в околі точки $x_0 = -1$.

Розв'язання :

Значення функції $y = \frac{1}{x^2}$ в точці $x_0 = -1$ дорівнює 1.

Знайдемо значення похідних функції $y = \frac{1}{x^2}$ в точці $x_0 = -1$:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{2}{x^3}, & y'(-1) &= 2; \\ y'' &= -\frac{2 \times (-3)}{x^4} = \frac{6}{x^4}, & y''(-1) &= 6; \\ y''' &= -\frac{6 \times 4}{x^5} = -\frac{24}{x^5}, & y'''(-1) &= 24; \\ y^{IV} &= -\frac{24 \times (-5)}{x^6} = \frac{120}{x^6}, & y^{IV}(-1) &= 120; \end{aligned}$$

$$y^{(n)} = \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}, \quad y^{(n)}(-1) = (n+1)!$$

Тоді ряд Тейлора для функції $y = \frac{1}{x^2}$ в околі точки $x_0 = -1$ буде мати вигляд :

$$\frac{1}{x^2} \approx 1 + \frac{2}{1!}(x+1) + \frac{6}{2!}(x+1)^2 + \frac{24}{3!}(x+1)^3 + \frac{120}{4!}(x+1)^4 + \dots + \frac{(n+1)!}{n!}(x+1)^n + \dots$$

або

$$\frac{1}{x^2} = 1 + 2(x+1) + 3(x+1)^2 + 4(x+1)^3 + 5(x+1)^4 + \dots + (n+1)(x+1)^n + \dots$$

Приклад 11. Знайти три перших, не рівних нулю, члени ряду Маклорена функції $y = \cos^2 x$.

Розв'язання :

В точці $x = 0$ функція $y = \cos^2 x$ дорівнює 1.

Знайдемо похідні заданої функції в точці $x = 0$:

$$y' = -2\cos x \times \sin x = -2\sin 2x, \quad y'(0) = 0;$$

$$y'' = -4\cos 2x, \quad y''(0) = -4;$$

$$y''' = 8\sin 2x, \quad y'''(0) = 0;$$

$$y^{IV} = 16\cos 2x, \quad y^{IV}(0) = 16.$$

Тоді розвинення в ряд Маклорена має вигляд:

$$\cos^2 x \approx 1 - \frac{4}{2!}x^2 + \frac{16}{4!}x^4, \text{ або } \cos^2 x \approx 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4.$$

Приклад 12. Обчислити $\sin 18^\circ$ з точністю 10^{-4} .

Розв'язання :

$$\text{Перетворимо градусну міру кута в радіанну } 18^\circ = \frac{2\pi}{360} \times 18 = \frac{\pi}{10}.$$

Використаємо розвинення в ряд Маклорена функції $y = \sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Підставляючи замість x число $\frac{\pi}{10}$, одержуємо числовий ряд

$$\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3! \times 10^3} + \frac{\pi^5}{5! \times 10^5} - \dots,$$

який є знакопочередним. Члени ряду задовольняють ознаку Лейбніца. Абсолютна величина третього члена ряду менша за потрібну точність:

$$\frac{\pi^5}{5! \times 10^5} \approx 2,55 \times 10^{-5} < 10^{-4}.$$

Тому для обчислення $\sin 18^\circ$ з потрібною точністю (10^{-4}) беремо два перших члени ряду.

В результаті одержуємо:

$$\sin 18^\circ \approx 0,3142 - 0,0052 = 0,3090.$$

Приклад 13. Обчислити $\sqrt[4]{90}$ з точністю до 10^{-3} .

Розв'язання :

Скористаємося біномним рядом

$$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots, \text{ де } -1 < x < 1.$$

Заданий корінь перепишемо у вигляді

$$\sqrt[4]{90} = \sqrt[4]{81 + 9} = \sqrt[4]{81\left(1 + \frac{9}{81}\right)} = 3\sqrt[4]{1 + \frac{1}{9}} = 3\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Обчислюємо $\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{4}}$. Вважаючи $m = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{9}$ одержуємо

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{90} &= 3\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{4}} = 3\left(1 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{8}}{2!} \times \frac{1}{9^2} + \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} - \frac{2}{8}}{3!} \times \frac{1}{9^3} + \dots\right) \\ &= 3\left(1 + \frac{1}{36} - \frac{1}{864} + \frac{7}{93312} - \dots\right) \approx 3(1 + 0,0278 - 0,0012) \approx 3,079. \end{aligned}$$

Для забезпечення потрібної точності тут взято суму трьох перших членів ряду, бо четвертий член $\frac{3 \times 7}{93312} < 0,001$.

Приклад 14. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \sin x^2 dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язання :

Використовуючи розвинення в ряд Маклорена функції $y = \sin x$ маємо $\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots$.

Цей числовий ряд збігається на всій числовій прямій, тому його можна скрізь почленно інтегрувати.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin x^2 dx &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \times 3!} + \frac{x^{11}}{11 \times 5!} - \dots\right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \times 3!} + \frac{1}{11 \times 5!} - \dots \approx 0,3333 - 0,0381 \approx 0,295. \end{aligned}$$

Тут обмежились обчисленням суми перших двох членів, тому що $\frac{1}{11 \times 5!} < 0,001$.

Приклад 15. Знайти три перших відмінних від нуля, члени розкладу в ряд розв'язку рівняння

$$y''' = xy'' + y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Розв'язання :

Шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді ряду Маклорена :

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Тут $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0 \times 1 + 0 = 0$.

Послідовно диференціюючи дане рівняння, дістанемо

$$y''' = y'' + xy''' + y'' = 2y'' + xy''', \quad y'''(0) = 2;$$

$$y^{IV} = 2y''' + y''' + xy^{IV} = 3y''' + xy^{IV}, \quad y^{IV}(0) = 0;$$

$$y^V = 3y''' + y''' + xy^{IV} = 4y''' + xy^{IV}, \quad y^V(0) = 8.$$

Підставляючи знайдені похідні в ряд Маклорена, дістанемо шуканий розв'язок

$$y(x) \approx \frac{1}{1!}x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{8}{5!}x^5 + \dots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \dots$$

Наприкінці, перейдемо до тригонометричних рядів, якими є ряди Фур'є.

Приклад 16. Розвинути в ряд Фур'є періодичні з періодом $2p$ функції :

а) $f(x) = p + x, \quad x \in (-p; p);$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} -1, & -p \leq x < 0; \\ 1, & 0 \leq x < p. \end{cases}$$

Розв'язання :

а) Графік функції зображено на рис. 1.

Задана функція кусково-монотонна на проміжку $(-p; p)$, тому її можна розвинути в ряд Фур'є. Отже задача зводиться до знаходження коефіцієнтів Фур'є.

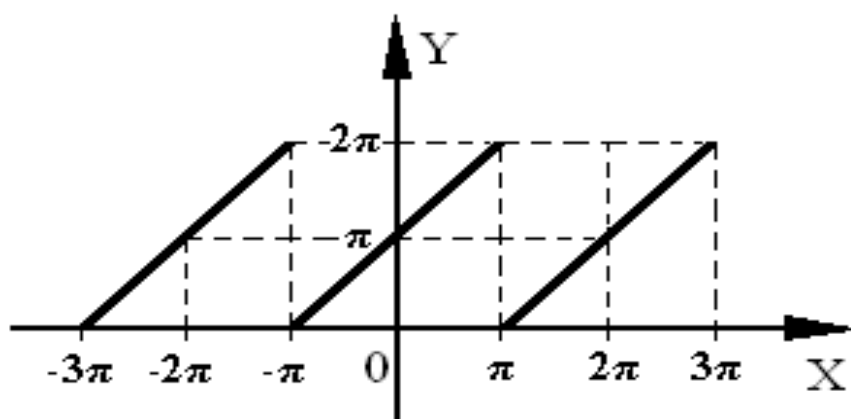


Рис. 1

$$\text{Маємо } a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx = \frac{1}{p} \int_{-p}^p (p+x) dx = \frac{1}{p} \left. \frac{(p+x)^2}{2} \right|_{-p}^p = 2p;$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos nx dx = \frac{1}{p} \int_{-p}^p (x+p) \cos nx dx = \left. \begin{array}{l} u = x+p, \quad du = dx \\ dv = \cos nx dx, \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{p} \left. \frac{x+p}{n} \sin nx \right|_{-p}^p - \frac{1}{n} \int_{-p}^p \sin nx dx = \frac{1}{p} \frac{2p}{n} \sin np - 0 \times \sin(-np) + \frac{\cos nx}{n^2} \Big|_{-p}^p =$$

$$= \frac{1}{p} \frac{2p}{n} \sin np + \frac{\cos np}{n^2} - \frac{\cos np}{n^2} = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin nx dx = \frac{1}{p} \int_{-p}^p (x+p) \sin nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x+p, \quad du = dx \\ dv = \sin nx dx, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{p} \left[-\frac{x+p}{n} \cos nx + \frac{1}{n} \int \cos nx dx \right]_{-p}^p = \frac{1}{p} \left[-\frac{x+p}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_{-p}^p =$$

$$= \frac{1}{p} \left[-\frac{p+p}{n} \cos np + \frac{1}{n^2} \sin np - \left(-\frac{-p+p}{n} \cos(-np) + \frac{1}{n^2} \sin(-np) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{p} \left[-\frac{2p}{n} \cos np + \frac{1}{n^2} \sin np - \frac{2p}{n} \cos np - \frac{1}{n^2} \sin np \right] = -\frac{4p}{n^2} \cos np = -\frac{4}{n^2} \cos np.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд дістанемо

$$f(x) = p + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

б) Графік функції зображено на рис. 2.

Дана функція є непарною, тому $a_0 = 0$, $a_n = 0$.

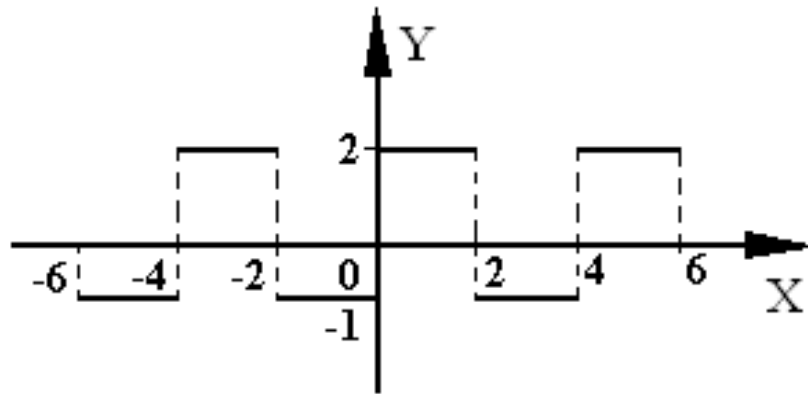


Рис. 2.

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin nx dx = \frac{2}{p} \int_0^p \sin nx dx = -\frac{2}{pn} \cos nx \Big|_0^p = -\frac{2}{pn} (\cos np - \cos 0) =$$

$$= -\frac{2}{pn} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} 0, & \text{при } n \text{ парних,} \\ \frac{4}{pn}, & \text{при } n \text{ непарних,} \end{cases} \text{ тобто}$$

$$b_{2k} = 0, \quad b_{2k-1} = \frac{4}{p} (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Ряд Фур'є цієї функції має вигляд

$$f(x) = \frac{4}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Приклад 17. Знайти розвинення в ряд Фур'є періодичної функції з періодом 4:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < 0; \\ 2, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

Розв'язання :

Ця функція визначена на відрізку $[-2; 2)$ має період $2l = 4$ і кусково-монотонна. Графік функції зображено на рис. 3.

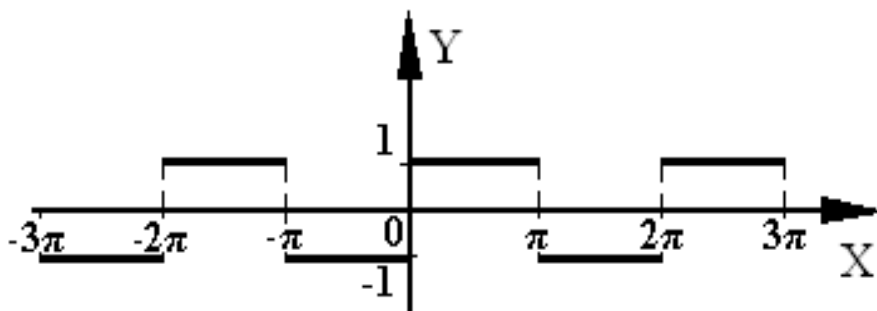


Рис. 3.

Розкладемо її в ряд Фур'є. Знаходимо коефіцієнти ряду:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-1) dx + \int_0^2 2x dx = \frac{1}{2} \left[-x \right]_{-2}^0 + \left[x^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2} (-2 + 4) = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{pnx}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-1) \cos \frac{pnx}{2} dx + \int_0^2 2x \cos \frac{pnx}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{pn} \sin \frac{pnx}{2} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{4}{pn} \sin \frac{pnx}{2} \right]_0^2 = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{pnx}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-1) \sin \frac{pnx}{2} dx + \int_0^2 2x \sin \frac{pnx}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{pn} \cos \frac{pnx}{2} \right]_{-2}^0 - \left[\frac{4}{pn} \cos \frac{pnx}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \frac{2}{pn} - \frac{2}{pn} \cos pn - \frac{4}{pn} \cos pn + \frac{4}{pn} =$$

$$= \frac{3}{pn} (1 - \cos pn) = \frac{3}{pn} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 2k, \\ \frac{6}{pn}, & \text{при } n = 2k - 1. \end{cases}$$

Ряд Фур'є цієї функції має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{6}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \frac{(2k-1)px}{2}.$$

Завдання до контрольної роботи № 6

Завдання 1. Дослідити на збіжність дані числові ряди.

- | | | |
|--|---|--|
| 1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n+2}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-1}}$. |
| 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{3^n}$; | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. |
| 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2n+1}$; | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n^2+2}$. |
| 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n+3}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3n+1)!}$; | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2}$. |
| 5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n+5}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4n+1}$; | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$. |
| 6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+4}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+n^2}$; | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$. |
| 7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+5}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+7}}$; | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{6^n}$. |
| 8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(n+3)!}$; | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$. |
| 9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2n+4}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \times 7^n}$; | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3n+1}$. |
| 10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{4n+2}$; | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. |

Завдання 2. З'ясувати чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним, або розбіжним.

- | | |
|--|--|
| 1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n-3}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. |
| 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n+6}$. |

$$3. \text{ a) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \times 2^n}{3n+1};$$

$$4. \text{ a) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \times (2n+2)!};$$

$$5. \text{ a) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \times 4^n};$$

$$6. \text{ a) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{(n+1)}};$$

$$7. \text{ a) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{6n-4};$$

$$8. \text{ a) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2};$$

$$9. \text{ a) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n)!};$$

$$10. \text{ a) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{\sqrt{4n+4}};$$

$$\text{б) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{3n+1}}.$$

$$\text{б) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \sqrt{\frac{4n-1}{9n+2}}.$$

$$\text{б) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2+5}.$$

$$\text{б) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{7^n}.$$

$$\text{б) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{(3n+1)^3}}.$$

$$\text{б) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n+3}.$$

$$\text{б) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(n+2)(n+5)}.$$

$$\text{б) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \times n!}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності поданих рядів.

$$1. \text{ a) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \times 5^n};$$

$$2. \text{ a) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \times 3^{n-1}}{2n-1};$$

$$3. \text{ a) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \times 2^n}{\sqrt{n+3}};$$

$$4. \text{ a) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \times n^2};$$

$$5. \text{ a) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \times 4^{n-1}}{\sqrt{2n+5}};$$

$$\text{б) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+3) \times 5^n};$$

$$\text{б) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n! \times 2^n};$$

$$\text{б) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{\sqrt{3n+2}};$$

$$\text{б) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{3^{n-1} \times n^2};$$

$$\text{б) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{\sqrt[3]{n+1}};$$

$$\text{в) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3n+1}.$$

$$\text{в) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n+1)!}.$$

$$\text{в) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{4^{2n} \times n}.$$

$$\text{в) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{5^n \times \sqrt{n}}.$$

$$\text{в) } \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{3n+4}}.$$

6. а) $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \times \sqrt{n}}{5^{2n-1}};$	б) $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+7)^n}{(2n-1)^2};$	в) $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{7^{2n}(n+1)}.$
7. а) $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \times 2^{n-1}}{3n+2};$	б) $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt[3]{6n+2}};$	в) $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n^3+1}.$
8. а) $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n \sqrt{n}};$	б) $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)!};$	в) $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{\sqrt[3]{6n+7}}.$
9. а) $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}(n^3+3)};$	б) $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+5)^n}{5^{n-1} \times n^3};$	в) $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{5^{2n} \times n^3}.$
10. а) $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n \times \sqrt{2n+5}};$	б) $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt[3]{(n+2)^2}};$	в) $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n \times (3n+2)}.$

Завдання 4. Розвинути в ряд Тейлора функцію $y = f(x)$ в околі точки $x = x_0$.

1. $f(x) = \frac{1}{x}; \quad x_0 = -1;$

2. $f(x) = \frac{2}{x^3}; \quad x_0 = 1;$

3. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}; \quad x_0 = 4;$

4. $f(x) = \sqrt{x^3}; \quad x_0 = 1;$

5. $f(x) = \sqrt{x}; \quad x_0 = 9;$

6. $f(x) = \frac{1}{x^2}; \quad x_0 = -1;$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad x_0 = -1;$

8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}; \quad x_0 = 8;$

9. $f(x) = \sin x; \quad x_0 = 0;$

10. $f(x) = \cos x; \quad x_0 = \frac{p}{2}.$

Завдання 5. Знайти три перших, не рівних нулю, члени ряду Маклорена функції $y = f(x)$.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9};$

2. $f(x) = \operatorname{tg} 2x;$

3. $f(x) = \cos^2 3x;$

4. $f(x) = \sin^2 4x$

$$5. \quad f(x) = \operatorname{tg}^2 x;$$

$$6. \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 16};$$

$$7. \quad f(x) = \sin 5x;$$

$$8. \quad f(x) = \cos 4x;$$

$$9. \quad f(x) = 2^{\cos x};$$

$$10. \quad f(x) = e^{\sin x}.$$

Завдання 6. Користуючись розвиненням в ряд Маклорена функції обчислити з точністю до 0,001.

$$1. \quad \sqrt[3]{8,36};$$

$$2. \quad \cos 2^0;$$

$$3. \quad \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx;$$

$$4. \quad \int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^5};$$

$$5. \quad \sqrt[3]{80};$$

$$6. \quad \arcsin \frac{1}{3};$$

$$7. \quad \int_0^{0.5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx;$$

$$8. \quad \int_0^{0.5} \frac{\sin x^2}{x} dx;$$

$$9. \quad \int_0^1 \cos \frac{x^2}{4} dx$$

$$10. \quad \sqrt[3]{e}.$$

Завдання 7. Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння, яке задовольняє заданим початковим умовам.

$$1. \quad y' = y \cos y + x, \quad y(0) = 1, \quad y''(0) = \frac{p}{3};$$

$$2. \quad y' = x^2 + y^2, \quad y(-1) = 0, \quad y'(-1) = 0;$$

$$3. \quad y' = 2e^y + xy, \quad y(0) = 0;$$

$$4. \quad y' = \ln(x+y) + xy, \quad y(1) = 0;$$

$$5. \quad y' = -2xy, \quad y(0) = 1, \quad y''(0) = 1;$$

$$6. \quad y' = 2yy', \quad y(0) = 0, \quad y''(0) = 1;$$

7. $y' = x^2 + xy + e^{-x}, \quad y(0) = 0;$
8. $y' = 2x^2 + y^3, \quad y(1) = 1;$
9. $y'' + y' = x^2 y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$
10. $y'' - xy' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Завдання 8. Розвинути в ряд Фур'є функції:

1. $f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \quad (-2; 2);$
2. $f(x) = 3x + 1, \quad (-p; p]$
3. $f(x) = \begin{cases} 1, & -p \leq x < 0, \\ 3, & 0 \leq x < p. \end{cases};$
4. $f(x) = \begin{cases} 0, & -p \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < p. \end{cases}$
5. $f(x) = x, \quad (-2; 2);$
6. $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$
7. $f(x) = 2x, \quad (-1; 1);$
8. $f(x) = 2x - 3, \quad (-3; 3)$
9. $f(x) = \begin{cases} 5 - x, & -p \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < p. \end{cases};$
10. $f(x) = x^2, \quad (-p; p).$

**Програма дисципліни “ВИЩА МАТЕМАТИКА”
(4 семестр)**

1. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1. Стохастичний експеримент та елементарні події. Види подій. Алгебра подій. Елементи комбінаторики.
2. Ймовірність випадкової події. Класичне означення ймовірності. Геометричне означення ймовірності. Відносна частота подій. Статистична ймовірність. Безпосереднє обчислення ймовірностей подій.
3. Теореми додавання і множення ймовірностей. Ймовірність появи хоча б однієї з подій. Незалежність подій. Умовна ймовірність. Формули повної ймовірності та Байєса.
4. Послідовні незалежні випробування. Схема Бернуллі. Формула Пуассона. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа.
5. Означення випадкової величини. Функція розподілу випадкової величини та її властивості. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закони розподілу дискретних випадкових величин: біномний, пуассонівський. Приклади розподілів неперервних величин: рівномірний, експоненціальний (показниковий), нормальний (закон Гаусса).
6. Числові характеристики випадкових величин : математичне сподівання, дисперсія та інші моменти, їхні властивості. Закон великих чисел. Нерівність Чебишева. Теорема Чебишева.

2. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

1. Вибірки. Статистична оцінка параметрів розподілу. Незміщена, ефективна і спроможна оцінки.
2. Поняття довірчого інтервалу та статистичні перевірки гіпотез.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бугір М.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Тернопіль: “Підручники та посібники”, 1998. – 176 с.
2. Васильченко І.П. Вища математика для економістів (спеціальні розділи). – К.: “Кондор”, 2004. – 348 с.
3. Вища математика: Збірник задач. У двох частинах. Ч.2 / П.П.Овчинников, П.С.Кропив’янський та ін. – К.: Техніка, 2003. – 376 с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая шк., 1999. – 399 с.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая шк., 1998. – 480 с.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2. – М.: Наука, 2000. – 416 с.
7. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика. Приклади і задачі. – К.: ВЦ “Академія”, 2002. – 623 с.
8. Овчинников П.П. Вища математика. Ч.2. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2. – М.: Наука, 1985. – 560 с.
10. Соколенко О.І. Вища математика. – К.: Видавничий центр “Академія”, 2002. – 430 с.
11. Пасічник І.В., Сясєв А.В., Маринчук Л.В. Теорія ймовірностей та випадкові процеси. Ч.1: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ, НМетАУ. – 2005.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

1. КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторика вивчає методи підрахунку кількості комбінацій, підкорених певним умовам, які можна утворити з елементів заданої скінченної множини будь-якого походження.

Групи елементів, які відрізняються порядком або складом елементів, називаються *сполуками*. Вони бувають трьох типів: розміщення, перестановки, комбінації.

Розміщення

Розміщеннями з n елементів по k називаються будь-які впорядковані k - елементні підмножини n - елементної множини, що різняться одна від одної або своїми елементами, або їхнім порядком (якщо вибрані елементи не повторюються, то маємо розміщення без повторень, а якщо повторюються, - розміщення з повтореннями).

Формули для числа розміщень A_n^k

Без повторень	З повтореннями
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, 0 \leq k \leq n$	$\overline{A}_n^k = n^k$
<i>Приклад.</i> Кількість різних тризначних телефонних номерів, які можна скласти з цифр від 0 до 9 так, щоб у запису номера всі цифри були різні, $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$	<i>Приклад.</i> Кількість різних тризначних телефонних номерів, які можна скласти з цифр від 0 до 9, якщо цифри в числі можуть повторюватись, $\overline{A}_{10}^3 = 10^3$

Перестановками k - елементної множини називаються її k - елементні впорядковані підмножини, що відрізняються тільки порядком елементів (якщо всі елементи заданої множини різні – маємо перестановки без повторень, а якщо в заданій множині елементи можуть повторюватися, серед яких a_1 повторюється k_1 раз, a_2 - k_2 разів, ..., a_l - k_l разів, то маємо перестановки з повтореннями).

Формули для числа перестановок P_k

Без повторень	З повтореннями
$P_k = k!$ $k! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k$ $1! = 0! = 1$	$\bar{P}_{k,k_1,k_2,\dots,k_l} = \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_l!}$ де $k_1 + k_2 + \dots + k_l = k$
<i>Приклад.</i> Скільки різних шести-значних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, не повторюючи ці цифри в одному числі? $P_6 = 6! = 720$	<i>Приклад.</i> Скількома способами можна переставити букви у слові “математика”? $P_{10,2,3,2} = \frac{10!}{2! \times 3! \times 2!} = 151200$

Комбінації (сполучення)

Комбінаціями (сполученнями) без повторень з n - елементів по k називаються будь-які k - елементні підмножини n - елементної множини, що різняться між собою принаймні одним елементом. Порядок елементів у сполученні не є істотним.

Комбінаціями (сполученнями) з повтореннями з n елементів (необов'язково різних) по k називаються набори цих елементів, до кожного з яких входять k елементів і які відрізняються хоча б одним елементом або тим, що принаймні один елемент входить в різні сполучення різне число разів.

Формули для числа комбінацій (сполучень) C_n^k

Без повторень	З повтореннями
$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, 0 \leq k \leq n$	$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
<p>Приклад. 3 групи, що складається з 25 студентів, можна виділити 5 осіб для чергування по академії C_{25}^5 способами, тобто</p> $C_{25}^5 = \frac{25!}{5!(25-5)!} = \frac{25!}{5! \times 20!} = 53130.$	<p>Приклад. Якщо у продажу є квіти чотирьох сортів, то різних букетів, що складаються з 7 квіток, можна скласти</p> $\begin{aligned} \bar{C}_4^7 &= C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120. \end{aligned}$

Деякі властивості числа сполучень (без повторень):

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ (зокрема, $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$).
2. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.
3. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

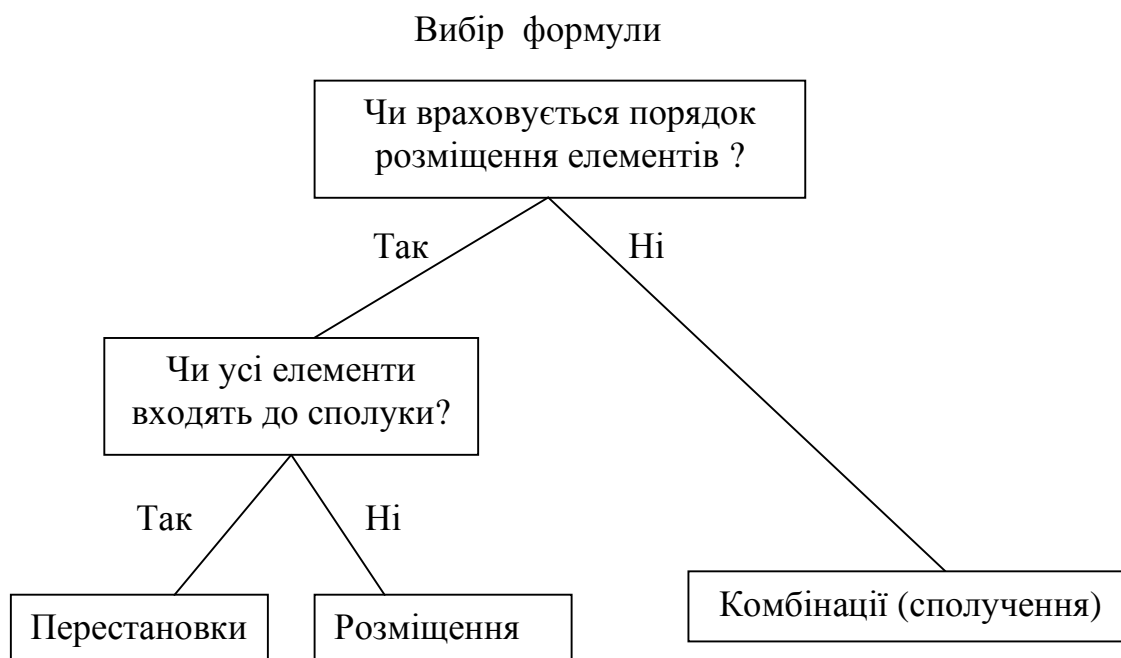
Зауваження. Розміщення, перестановки та сполучення пов'язані між собою рівністю

$$A_n^k = P_k \times C_n^k = k! \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Правило множення. Нехай необхідно виконати одну за одною k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 числом способів, другу - n_2 числом способів і так до k -ї дії, яку можна виконати n_k числом способів, то всі k дій разом можуть бути виконані $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ числом способів.

Схема розв'язування комбінаторних задач

Вибір правила	
Правило суми	Правило добутку
Якщо елемент A можна вибрати n способами, а після цього елемент B - m способами, то A або B можна вибрати $(n + m)$ способами.	Якщо елемент A можна вибрати n способами, а елемент B - m способами, то A і B можна вибрати $(n \times m)$ способами.



2. ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

Формула класичної ймовірності

Ймовірність в загальному випадку є кількісна міра можливості появи події в експерименті. Позначимо ймовірність події A буквою P (probability (англ.) – ймовірність).

Ймовірністю $P(A)$ події A називають відношення кількості сприяючих події A результатів експерименту m до загальної кількості рівноможливих несумісних елементарних подій n

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Відносна частота події обчислюється за формулою

$$W(A) = \frac{m^*}{n^*},$$

де m^* - число експериментів, у яких відбулася подія A , n^* - загальна кількість проведених експериментів. За *статистичним* означенням ймовірність події є відносна частота цієї події.

Геометрична ймовірність

Нехай простір елементарних подій W інтерпретується як область на числовій осі (або на площині, або у просторі), яка має відповідно довжину, площу або об'єм. Тоді $P(A) = \frac{mesA}{mesW}$,

де $mesA$ - вимір (довжина або площа, або об'єм) області A ; $mesW$ - вимір області W . Ця формула називається формулою *геометричної* ймовірності.

Безперечно

$$0 < P(A) < 1 \quad (P(W) = 1; \quad P(\emptyset) = 0).$$

3. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ І МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Об'єднання (сума) подій $A \cup B$ (або $A + B$) – це подія, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається або подія A , або подія B .

Перетин (добуток) подій $A \cap B$ (або AB) – це подія, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли одночасно відбуваються і подія A , і подія B .

Різниця подій $B \setminus A$ – це подія, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія B , але не відбувається подія A .

Дві події називаються *несумісними*, якщо $A \cap B = \emptyset$, тобто вони одночасно не відбуваються.

Події A_1, A_2, \dots, A_n утворюють *повну групу* подій, якщо: а) $\bigcup_{i=1}^n A_i = W$;
б) $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ (тобто усі події попарно несумісні).

Кожній події A можна поставити у відповідність *протилежну подію* \bar{A} , яка відбувається тоді, коли A не відбувається. Очевидно, $A \cup \bar{A} = W, A \cap \bar{A} = \emptyset$.

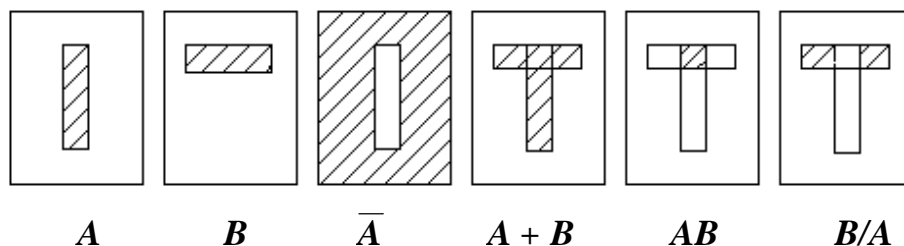
Приклад. Два шахісти грають одну партію. Сукупність всіх можливих результатів партії (A - виграє I шахіст, B - виграє II шахіст, C - нічийний результат) утворюють *повну групу подій* (в результаті експерименту (партії) з'явиться тільки одна з подій групи).

Приклад. Якщо стипендія нараховується тільки при отриманні на іспитах добрих та відмінних оцінок, то події “стипендія” та “незадовільна або задовільна” оцінка є протилежними подіями.

Події називаються *рівноможливими*, якщо є підстава вважати, що ніяка з них не є більш можливою, ніж інші.

Приклад. Поява “герба” або числа при підкиданні монети є рівноможливими подіями.

Приклад. Діаграми В'єнна. У квадрат навмання кидають точку. Якщо точка потрапила до “вертикального” прямокутника, то говоримо, що відбулася подія A , а якщо до “горизонтального” – подія B . Події $A, B, \bar{A}, A + B, AB, B/A$ відбуваються, коли точка потрапляє до відповідної фігури, зображеної на рисунку



Теорема додавання ймовірностей

сумісних подій

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

несумісних подій

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Наслідок 1. Сума ймовірностей подій A_1, A_2, \dots, A_n , що складають повну групу, дорівнює одиниці, тобто $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$.

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Подія A називається *незалежною* від події B , якщо ймовірність здійснення події A не залежить від того, відбулася або ні подія B (у протилежному випадку події *залежні*).

Ймовірність $P_A(B)$ або $P(B/A)$ називається *умовною ймовірністю* події B при умові A , тобто це ймовірність настання події B , обчислена в припущенні, що подія A вже відбулася.

Теорема множення ймовірностей

незалежних подій

$$P(AB) = P(A) \times P(B);$$

залежних подій

$$P(AB) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

Ймовірність появи хоча б однієї з незалежних в сукупності подій дорівнює різниці між одиницею та добутком ймовірностей протилежних подій, тобто

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \times P(\bar{A}_2) \times \dots \times P(\bar{A}_n).$$

4. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

Нехай події H_1, H_2, \dots, H_n утворюють повну групу подій, тобто вичерпують всі можливі результати даного експерименту. Подія A може відбутися за умовою появи однієї з подій H_i з деякою ймовірністю $P_{H_i}(A)$.

Тоді ймовірність події A обчислюється за *формулою повної ймовірності*

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \times P_{H_i}(A),$$

де $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$, тобто дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з гіпотез H_i на відповідну умовну ймовірність події A .

Нехай тепер відомо, що результатом експерименту є подія A . Її поява зумовить переоцінку *апостеріорних* (а posteriori (лат.) – відомих до спроби) ймовірностей гіпотез, які можна обчислити у цьому випадку за *формулами Байєса*

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \times P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

де $P_A(H_i)$ - *апостеріорні* (а posteriori (лат.) – після експерименту) ймовірності гіпотез після випробування, коли стало відомо, що його результатом є подія A ; $P_{H_i}(A)$ - ймовірність події A при умові H_i ; $P(A)$ - ймовірність події A , знайдена за формулою повної ймовірності.

Формули Байєса дають можливість переоцінити ймовірності гіпотез з урахуванням результату дослідження.

4. ПОСЛІДОВНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ

Нехай ймовірність появи події A в кожному з n незалежних аналогічних дослідів $P(A) = p$ є однаковою і незалежною від результатів інших спроб тієї ж серії (ймовірність протилежної події $P(\bar{A}) = q = 1 - p$).

Ймовірність того, що в n дослідах рівно k разів буде успіх, тобто поява події A , обчислюється за формулою Бернуллі

$$P_n(k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Ймовірність того, що подія A постане не менш ніж m разів, дорівнює

$$P_n(k \geq m) = \sum_{k=m}^n P_n(k).$$

Ймовірність того, що подія A настане хоча б один раз, обчислюється за формулою

$$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n.$$

Якщо n достатньо велике, а p - достатньо мале число, наприклад, $n > 100$, а $p < 0,1$ однак при цьому $0 < n \times p \leq 15$, то найчастіше використовують асимптотичну формулу Пуассона

$$P_n(k) = \frac{l^k}{k!} \times e^{-l},$$

де $l = n \times p$ - середнє число появи події A в n випробуваннях.

Формулу Бернуллі практично застосовують при відносно невеликих значеннях числа незалежних випробувань n . Якщо n достатньо велике, то користування цією формулою стає досить складним, бо необхідно виконувати громіздкі дії над великими числами. У цьому випадку слід застосовувати наближені (асимптотичні) формули.

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що у n незалежних випробуваннях, у кожному з яких подія A відбувається з однаковою ймовірністю p , подія A настане рівно k разів, наближено дорівнює

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \times p \times q}} \times j(x),$$

$$\text{де } j(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \times e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - n \times p}{\sqrt{n \times p \times q}}.$$

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних спробах, у кожній з яких ймовірність появи події A стала і дорівнює p , подія A наступить не менш k_1 разів і не більш k_2 разів, наближено дорівнює

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

$$\text{де } x_1 = \frac{k_1 - n \times p}{\sqrt{n \times p \times q}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - n \times p}{\sqrt{n \times p \times q}}.$$

Інтеграл $\int e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ не виражається через елементарні функції, тому для обчислення $P_n(k_1, k_2)$ користуються функцією $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ (інтегральна функція Лапласа). Тоді $P_n(k_1, k_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Зауваження. Функції $\frac{l^k \times e^{-l}}{k!}$, $j(x)$ та $F(x)$ табульовані для практичних цілей ([4], [5], [6]). Слід пам'ятати, що $j(x)$ парна, тобто $j(-x) = j(x)$ і має максимум при $x = 0$ $j(0) = 0,3989$, а $F(x)$ непарна, тобто $F(-x) = -F(x)$. В таблицях значення функції $F(x)$ наведені для $0 \leq x \leq 5$; деякі з її значень: $F(0) = 0$, $F(1) = 0,3414$, $F(4) = 0,49997$, $F(x \approx 5) = 0,5$.

5. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Випадковою величиною називається величина, яка в результаті випробування може прийняти те або інше значення, заздалегідь невідоме і таке, що залежить від випадкових обставин.

Якщо випадкова подія є якісною характеристикою випробування, то випадкова величина може розглядатись як його кількісна характеристика.

Випадкова величина X , що набуває скінченну або зчисленну множину значень x_1, x_2, \dots, x_n називається *дискретною*; випадкова величина називається *неперервною*, якщо всі її можливі значення належать неперервному (скінченному або безмежному) проміжку числової вісі.

Основні *числові характеристики* випадкової величини:
для *дискретної* величини математичне сподівання

$$M(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i;$$

дисперсія

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \quad \text{або} \quad D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \times p_i - [M(X)]^2;;$$

середнє квадратичне відхилення $S(X) = \sqrt{D(X)}$;

для *неперервної* величини математичне сподівання $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$;

дисперсія $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx$ або $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2$,

де $f(x)$ - щільність розподілу ймовірностей.

Зауваження. За означенням $f(x) = F'(x)$, де $F(X)$ - функція розподілу неперервної випадкової величини.

Особливу увагу слід звернути на теореми ([10], гл. XX, § 12, 13), які дозволяють знайти ймовірність попадання випадкової величини в деякий заданий інтервал.

Деякі закони розподілу дискретних випадкових величин

Біномний розподіл. Цілочислова невід’ємна випадкова величина X (кількість появ події в n незалежних випробуваннях) розподілена за біномним законом, якщо подія $\{X = k\}$ має ймовірність

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n; \quad q = 1 - p.$$

Ймовірності можливих значень випадкової величини дорівнюють відповідним членам розкладу бінома $(p + q)^n$.

Функція розподілу випадкової величини X має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \notin 0; \\ \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k \times p^k \times q^{n-k}, & 0 < x \in m; \\ 1, & x > n, m = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Числові характеристики біномного розподілу:

$$M(X) = n \times p; \quad D(X) = n \times p \times q; \quad S(X) = \sqrt{n \times p \times q}.$$

Розподіл Пуассона. Числова невід’ємна величина має розподіл Пуассона, якщо подія $\{X = k\}$ має ймовірність

$$P(X = k) = \frac{l^k}{k!} \times e^{-l},$$

де $l > 0$ - параметр закону Пуассона (п.3.2), $k = 0, 1, 2, \dots$

Функція розподілу величини X має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \notin 0; \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l^k}{k!} \times e^{-l}, & 0 < x \in n, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Числові характеристики розподілу Пуассона: $M(X) = D(X) = l$.

Закони розподілу неперервних випадкових величин

Рівномірний розподіл. Неперервна випадкова величина має рівномірний розподіл на проміжку $[a, b]$, якщо щільність розподілу є стала величина на цьому проміжку і дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Функція розподілу рівномірного закону має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Числові характеристики рівномірного розподілу дорівнюють:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ймовірність попадання випадкової величини, яка має рівномірний розподіл, в інтервал $(a; b)$ обчислюється за формулою

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{dx}{b-a} = \frac{b-a}{b-a}.$$

Рівномірний розподіл часто використовують для генерування випадкових чисел.

Експоненціальний (показниковий розподіл). Випадкова величина X має експоненціальний розподіл, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ l e^{-lx}, & x > 0. \end{cases}$$

де $l > 0$ - параметр закону.

Відповідно функцію розподілу записують так:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-lx}, & x > 0. \end{cases}$$

Експоненціальний закон має числові характеристики:

$$M(X) = \frac{1}{l}; \quad D(X) = \frac{1}{l^2}; \quad s(X) = \frac{1}{l}.$$

Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(a; b)$ обчислюється за формулою:

$$P(a < X < b) = \int_a^b l \times e^{-lx} dx = -e^{-lx} \Big|_a^b = e^{-la} - e^{-lb}.$$

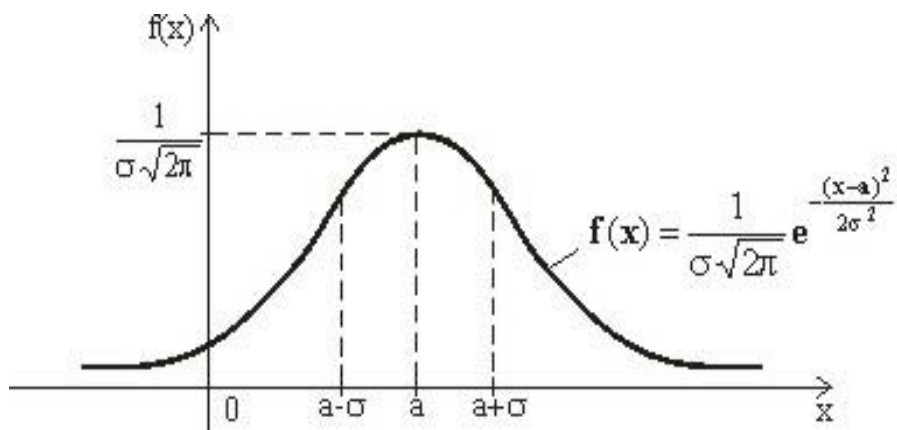
Експоненціальний закон застосовується для опису таких випадкових величин, як час безвідмовної роботи пристроїв або їхніх окремих елементів.

Нормальний закон розподілу (закон Гаусса). Неперервна випадкова величина X розподілена за законом Гаусса, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де σ і a - параметри розподілу.

Графік функції $f(x)$ називається кривою нормального розподілу:



Ця крива симетрична відносно прямої $x = a$, має максимум при $x = a$; при $x \rightarrow \pm\infty$ крива наближується до вісі OX . Якщо s зростає, то функція $f(x)$ спадає і крива стає більш розтягнутою вздовж OX .

Числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом Гаусса, дорівнюють:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \times f(x) dx = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \times e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx = a;$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \times f(x) dx - a^2 = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx - a^2 = s^2.$$

Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(a; b)$

$$P(a < X < b) = F\left(\frac{b-a}{s}\right) - F\left(\frac{a-a}{s}\right),$$

де $F(X)$ - функція Лапласа.

Розподіл χ^2 (хі – квадрат). Розподілом χ^2 з k - ступіннями свободи називається розподіл суми квадратів k незалежних випадкових величин, розподілених за стандартним нормальним законом $N(a, s)$ (де $a = 0; s = 1$),

тобто
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k Z_i^2,$$

де Z_i ($i = 1, 2, \dots, k$) мають нормальний розподіл $N(0; 1)$.

Розподіл Стюдента (t – розподіл). Розподілом Стюдента називається розподіл випадкової величини

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2}{k}}},$$

де Z - випадкова величина, розподілена за стандартним нормальним законом, тобто $N(0; 1)$; χ^2 - незалежна від Z випадкова величина, що має

χ^2 - розподіл з k ступенями свободи. При $k \rightarrow \infty$ крива t - розподілу наближається до нормальної кривої $N(0;1)$.

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

1. Оцінка для математичного сподівання (вибіркова середня)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N n_i \times x_i}{n}.$$

2. Незміщена та зміщена оцінки дисперсії

$$\bar{D}_x = \frac{\sum_{i=1}^N n_i \times (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}, \quad \bar{D}_x^* = \frac{\sum_{i=1}^N n_i \times (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

3. Для нормального розподілу інтервал довіри для математичного сподівання (вибіркової середньої) при невідомому значенні середньоквадратичного відхилення S та при відомому вибірковому

$$\bar{S} = \sqrt{\bar{D}_x} \text{ має вигляд: } \bar{x} - t_g \times \frac{\bar{S}}{\sqrt{n}} < a = m_x < \bar{x} + t_g \times \frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}, \text{ де число } t_g$$

знаходимо за таблицями розподілу Стюдента (дивись додатки) за заданою надійністю g і числом ступенів свободи $k = n - 1$.

4. Для нормального розподілу справедлива формула для границь довірчого інтервалу для дисперсії при довірчій ймовірності (надійності) g :

$$\frac{n \times \bar{D}_x}{c_2^2} < D_x < \frac{n \times \bar{D}_x}{c_1^2}, \text{ де } c_1^2 - \text{значення випадкової величини, що має}$$

розподіл χ^2 (хі квадрат Пірсона) з числом ступенів свободи $f_1 = n - 1$ при

рівні значимості $a_1 = 1 - \frac{a}{2}$, де $a = 1 - g$; c_2^2 - значення випадкової

величини, що має розподіл χ^2 з числом ступенів свободи $f_2 = n - 1$ при

рівні значимості $a_2 = \frac{a}{2}$.

ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ

Розглянемо приклади випадкових величин, що найчастіше використовуються у дослідженнях:

1. Неперервна випадкова величина *розподілена нормально*, її

диференціальна функція розподілу має вигляд $f(x) = \frac{1}{s \times \sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}$.

Числа a, s називають параметрами розподілу, їхні вибіркові оцінки знаходять за формулами $\bar{a} = \bar{x}$, $\bar{s} = \sqrt{\bar{D}_x} = \bar{s}$.

2. Випадкова величина, що має сталу диференціальну функцію

$f(x) = \frac{1}{b-a}$, де $a \leq x \leq b$, та $f(x) = 0$, якщо $x < a$ і $x > b$, розподілена *рівномірно* і має параметри розподілу a, b . Їхні вибіркові оцінки обчислюються за формулами $\bar{a} = \bar{x} - \sqrt{3} \times \bar{s}$, $\bar{b} = \bar{x} + \sqrt{3} \times \bar{s}$.

3. Випадкова величина, диференціальна функція якої $f(x) = l \times e^{-lx}$ при $x \geq 0$ та $f(x) = 0$, якщо $x < 0$, має *експоненціальний (показниковий) розподіл*. Параметр розподілу l має оцінку $\bar{l} = \frac{1}{\bar{x}}$.

4. *Біноміальним є закон розподілу випадкової величини X , ймовірності*

якої обчислюються за формулами Бернуллі $P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times p^k \times q^{n-k}$,

де $q = 1 - p$; n, p – параметри. Параметр розподілу p має оцінку

$p^* = \frac{\bar{x}}{m}$, де m – максимальне число появи події у випробуванні.

5. У випадку, коли p є дуже малим числом, а числа n, m – достатньо великі, замість формули Бернуллі слід використовувати формулу

$P_m = \frac{l^m}{m!} \times e^{-l}$ (розподіл Пуассона). Параметр розподілу l має оцінку

$\bar{l} = \bar{x}$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 7

Тема 1. Комбінаторика

Література : [3], гл. 6, § 6.1; [7], гл. 10, § 30; [10], розділ 2, § 2.1.

При розв'язанні задач теорії ймовірностей часто доводиться підраховувати кількість усіх ймовірних способів розташування деяких елементів або здійснення деякої події. У таких випадках використовують поняття комбінаторики, основними з яких є перестановки, розміщення і комбінації (сполучення), а також комбінаторне правило множення.

Розглянемо деякі типові задачі.

Приклад 1. Скількома способами можна поставити на полку 5 різних книг ?

Розв'язання. Першою можна поставити будь-яку з 5 книг. Другою – будь-яку з 4, що залишилися і т.д. Таким чином, кількість способів, якими можна поставити на полку 5 різних книг, дорівнює числу перестановок з 5 елементів, тобто

$$P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120.$$

Приклад 2. Студент повинен скласти три іспити протягом семи днів (не більше, ніж один іспит у день). Скількома способами це можна зробити ?

Розв'язання. Кількість способів дорівнює числу упорядкованих підмножин з трьох елементів (дні складання конкретних іспитів), що можна взяти з множини з семи елементів (дні, які відведені для складання іспитів), тобто

$$A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210.$$

У додаток відзначимо, що у випадку, коли, припустимо, відомо, що останній іспит повинен бути складеним на сьомий день, кількість способів буде дорівнювати

$$3 \times A_6^2 = 3 \times 6 \times 5 = 90.$$

Приклад 4. Скількома способами можна призначити варту з 9 солдатів, 2 сержантів та 1 офіцера, якщо в підрозділі 14 солдатів, 3 сержанти і 4 офіцери.

Розв'язання. Дев'ять солдатів можна вибрати

$$n_1 = C_{14}^9 = C_{14}^5 = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 2002 \text{ способами,}$$

два сержанти

$$n_2 = C_3^2 = C_3^1 = \frac{3}{1} = 3 \text{ способами,}$$

одного офіцера

$$n_3 = C_4^1 = \frac{4}{1} = 4 \text{ способами.}$$

Таким чином, за правилом множення, варту можна призначити

$$n = n_1 \times n_2 \times n_3 = 2002 \times 3 \times 4 = 24024 \text{ способами.}$$

Тема 2. Безпосереднє обчислення ймовірностей подій

Література : [3], гл. 6, § 6.3; [4], гл. 1, § 1,2; [5], гл. 1; [6], гл. 5, § 1; [7], гл. 10, § 31,32; [9], гл. 20, § 1,2; [10], гл. 2, § 2.1.

Наведемо приклади обчислення ймовірностей подій із застосуванням класичного означення ймовірностей та формул комбінаторики.

Приклад 1. Кидають два гральних кубика. Яка ймовірність того, що сума очок, що випали, буде парною ?

Розв'язання. Позначимо через A подію, ймовірність якої треба знайти. За означенням, ймовірність $P(A) = \frac{m}{n}$. Кількість усіх можливих ком-

бінацій, що взагалі можуть бути у цьому випадку $n = n_1 \times n_2 = 6 \times 6 = 36$.

Події A будуть сприяти $m = 18$ комбінацій, у яких сума очок буде парною, а саме: 1-1, 1-3, 1-5, 2-2, 2-4, 2-6, 3-1, 3-3, 3-5, 4-2, 4-4, 4-6, 5-1, 5-3, 5-5, 6-2, 6-4, 6-6.

Таким чином $P(A) = \frac{18}{36} = 0,5$.

Приклад 2. В урні містяться 6 білих і 4 чорних кульки. З урни виймають навмання одразу 5 кульок. Знайти ймовірність події: A – усі кулі білі; B – чотири кулі білі та одна чорна.

Розв’язання. Число рівноможливих незалежних подій дорівнює

$$n = C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \times 5!} = 252.$$

Події A сприяють $m_1 = C_6^5 = \frac{6!}{5! \times 1!} = 6$, а події B — $m_2 = C_6^4 \times C_4^1 =$
 $= \frac{6!}{2! \times 4!} \times \frac{4!}{3! \times 1!} = 15 \times 4 = 60$ наслідків експерименту. Тому

$$P(A) = \frac{6}{252} = \frac{1}{42} \approx 0,024,$$

$$P(B) = \frac{60}{252} = \frac{2}{7} \approx 0,24.$$

Приклад 3. У коробці містяться шість однакових, занумерованих куль. Навмання по одній виймають усі кулі. Знайти ймовірність того, що номери вийнятих куль розташуються за зростанням.

Розв’язання. Нехай A – подія, ймовірність якої треба знайти. Результатами експерименту є перестановки без повторень з 6 елементів. Число усіх результатів експерименту дорівнює P_6 . Для події A сприятливим є лише один результат (номери зростатимуть). Отже,

$$P(A) = \frac{1}{P_6} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}.$$

Приклад 4. Слово “інтеграл” складено з літер на картках розрізної азбуки. З них навмання виймають три картки і кладуть в ряд одну за однією в порядку появи. Яка ймовірність того, що при цьому складеться слово “гра” ?

Розв’язання. При утворенні простору елементарних подій W розглядаються усі впорядковані 3-елементні підмножини 8-елементної множини (букви, що утворюють слово “інтеграл”). Тому $n = A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} =$

$= 8 \times 7 \times 6 = 336$, а сприятливими для шуканої події A є лише один випадок ($m = 1$), коли підряд буде вийнято букви “г”, “р” і “а”. Отже,

$$P(A) = \frac{1}{336} \approx 0,003.$$

Тема 3. Теореми додавання і множення ймовірностей

Література : [3], гл. 6, § 6.4; [4], гл. 2, § 1,2; [5], гл. 2,3; [6], гл. 5, § 2; [7], гл. 10, § 32; [9], гл. 20, § 3,4,5; [10], гл. 2, § 2.1.

При розв’язанні практичних задач часто необхідно визначати ймовірності досить складних подій, безпосереднє обчислення яких пов’язане зі значними труднощами або взагалі неможливе. У таких випадках складні події розглядають у вигляді комбінацій простіших подій з застосуванням операцій додавання та множення. При цьому студент повинен відрізняти сумісні та несумісні, незалежні та залежні події. Також важливим є поняття умовної ймовірності подій.

Приклад 1. В урни містяться 12 однакових за розміром куль: 5 червоних, 4 зелених і 3 білих. Яка ймовірність того, що куля, довільним чином взята з урни, буде кольоровою ?

Розв’язання. Нехай подія A – виймання червоної кулі з урни, а подія B – виймання зеленої кулі. Тоді $A+B$ – подія, ймовірність якої треба знайти (виймання кольорової кулі). Вони несумісні (береться лише одна кулька). Тому

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{3}{4}.$$

Приклад 2. Ймовірність попадання в мішень одним стрільцем становить 0,8, іншим – 0,7. Стрільці незалежно один від одного зробили по одному пострілу. Яка ймовірність того, що принаймні один стрілець влучить в мішень ?

Розв'язання. Нехай подія A – влучення першого стрільця в ціль, подія B – другого, а подія C – шукана подія. Тоді $C=A+B$. Враховуючи, що події A і B – сумісні, проте незалежні, дістаємо:

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,8 + 0,7 - 0,8 \times 0,7 = 0,94.$$

Приклад 3. У складальника є 3 конусних та 7 еліптичних валиків. Він бере один раз 2 валики, а потім ще 2. Яка ймовірність того, що взяті валики еліптичні?

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що перший раз взяті валики еліптичні, подія B – другий раз взяті теж еліптичні валики.

Оскільки події A й B залежні, то за теоремою добутку ймовірностей залежних подій

$$P(AB) = P(A) \times P_A(B) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} \times \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{7}{15} \times \frac{5}{14} = \frac{1}{6}.$$

Приклад 4. Ймовірність у студента другого курсу перейти на третій дорівнює 0,9, а ймовірність закінчити академію – 0,8. З якою ймовірністю можна стверджувати, що студент третього курсу закінчить академію?

Розв'язання. Нехай подія A – перехід на третій курс, подія B – закінчення академії. Ймовірність цих подій, згідно з умовою, $P(A)=0,9$, $P(B)=0,8$. Події A й B залежні, оскільки для того, щоб закінчити академію, треба спочатку перейти на третій курс. Отже

$$P(AB) = P(A) \times P_A(B) = 0,9 \times P_A(B) = 0,8, \text{ звідки } P_A(B) = \frac{0,8}{0,9} = 0,89.$$

Приклад 5. Стрілець A_1 влучає в ціль з ймовірністю $p_1 = 0,8$, стрілець A_2 – з ймовірністю $p_2 = 0,7$, стрілець A_3 – з ймовірністю $p_3 = 0,9$. Знайти ймовірність хоча б одного попадання (подія A) при одному пострілі кожного зі стрільців.

Розв'язання. Обчислимо ймовірності протилежних подій, які полягають в тому, що кожен зі стрільців не влучить в ціль:

$$q_1 = 1 - p_1 = 0,2; \quad q_2 = 1 - p_2 = 0,3; \quad q_3 = 1 - p_3 = 0,1.$$

Ймовірність того, що жоден зі стрільців не влучить в ціль, тобто ймовірність події \bar{A} , дорівнює $P(\bar{A}) = q_1 q_2 q_3 = 0,2 \times 0,3 \times 0,1 = 0,006$.

Тоді ймовірність того, що хоча б один зі стрільців влучить в ціль

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,006 = 0,994.$$

Тема 4. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Література: [3], глава 6, § 6.3; [4], глава 2, § 3,4; [5], глава 4, § 2,3; [6], глава 5, § 4; [7], глава 10, § 32; [9], глава 20, § 6; [10], глава 2, § 2.1.

Наслідками теорем додавання та множення ймовірностей є формули повної ймовірності та Байєса. Розглянемо приклад.

Приклад. У комп'ютерному магазині за рік продано 1000 моніторів, 300 принтерів і 100 сканерів. Протягом гарантійного терміну в сервісний центр надходять на ремонт у середньому 0,5% моніторів, 1% принтерів і 1,5% сканерів. 1) Визначити ймовірність того, що навання вибрана з перерахованих за серійним номером одиниця товару надійде протягом гарантійного терміну на ремонт у сервісний центр. 2) Навмання вибрана з перерахованих за серійним номером одиниця товару надійшла протягом гарантійного терміну на ремонт у сервісний центр. Яка ймовірність того, що це монітор?

Розв'язання. 1) Нехай A – подія, яка полягає в тому, що навання вибрана з перерахованих за серійним номером одиниця товару надійде протягом гарантійного терміну на ремонт у сервісний центр. Введемо гіпотези: H_1 – подія, яка полягає в тому, що навання вибрана з перерахованих за серійним номером одиниця товару – монітор; H_2 – подія, яка полягає в тому, що навання вибрана одиниця товару – принтер; H_3 – подія, яка полягає в тому, що навання вибрана одиниця товару – сканер. Події H_1, H_2, H_3 утворюють повну групу попарно несумісних подій. За умовою задачі

$$P(H_1) = \frac{1000}{1000 + 300 + 100} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \quad P(H_2) = \frac{300}{1400} = \frac{3}{14}, \quad P(H_3) = \frac{100}{1400} = \frac{1}{14}.$$

$$\text{Перевірка: } P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = \frac{10}{14} + \frac{3}{14} + \frac{1}{14} = 1.$$

Крім того, маємо умовні ймовірності $P_{H_1}(A) = 0,005$, $P_{H_2}(A) = 0,01$, $P_{H_3}(A) = 0,015$.

За формулою повної ймовірності

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) P_{H_1}(A) + P(H_2) P_{H_2}(A) + P(H_3) P_{H_3}(A) = \frac{5}{7} \times 0,005 + \\ &+ \frac{3}{14} \times 0,01 + \frac{1}{14} \times 0,015 = \frac{1}{280} + \frac{3}{1400} + \frac{3}{2800} = \frac{10 + 6 + 3}{2800} = \frac{19}{2800} \gg 0,007. \end{aligned}$$

2) Нехай тепер A – подія, яка полягає в тому, що навання вибрана з перерахованих за серійним номером одиниця товару надійшла протягом гарантійного терміну на ремонт у сервісний центр. Введемо ті ж самі гіпотези H_1, H_2, H_3 , що й у першому пункті задачі. Тоді за формулою Байєса

$$\begin{aligned} P_A(H_1) &= \frac{P(H_1) P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{7} \times 0,005}{\frac{5}{7} \times 0,005 + \frac{3}{14} \times 0,01 + \frac{1}{14} \times 0,015} = \frac{\frac{1}{280}}{\frac{19}{2800}} = \\ &= \frac{10}{19} \gg 0,526. \end{aligned}$$

Неважко бачити, що після того, як стало відомо, що подія A відбулася, оцінка гіпотези H_1 суттєво змінилася: тоді як її апіорна оцінка $P(H_1)$

складала $\frac{5}{7} \gg 71,4\%$, апостеріорна оцінка $P_A(H_1)$ складає вже

$\frac{10}{19} \gg 52,6\%$, тобто оцінка гіпотези H_1 зменшилася майже на 21%.

Тема 5. Послідовні незалежні випробування. Граничні теореми

Література: [3] , гл. 6, § 6.6; [4], гл. 3, § 1-4; [5], гл.5, § 1-4; [6], гл. 5, § 3,9; [7], гл. 10, § 33; [11], § 3.

Формули для схеми незалежних випробувань

№	Схема розрахунку	Біноміальний розподіл – формула Бернуллі	Формула Пуассона	Формули Муавра-Лапласа
1	Ймовірність того, що подія A наступить рівно k разів	$P_n(k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k},$ $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$ $p + q = 1$	$P_n(k) \approx \frac{l^k}{k!} \times e^{-l}$ $l = n \times p$	$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \times j(x)$ $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$
2	Ймовірність того, що подія A наступить не менш ніж k_1 і не більше k_2 разів	$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) =$ $= \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k \times p^k \times q^{n-k}$	$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx$ $\approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{l^k}{k!} \times e^{-l}$	$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx$ $\approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$

Розглянемо приклади, при розв'язанні яких будемо користуватись формулами та відомостями, наведеними у довідниковому матеріалі посібника.

Приклад 1. Два шахісти умовились зіграти десять результативних партій. Ймовірність виграшу кожної окремої партії першим гравцем дорівнює $\frac{2}{3}$, другим – $\frac{1}{3}$ (нічий не враховуються). Чому дорівнює ймовірність:

- 1) виграшу всієї гри (потрібно виграти понад п'ять партій)
 - а) першим гравцем, б) другим гравцем;
- 2) загального нічийного результату ?

Розв'язання. Визначимо події A, B, C : A – виграє перший гравець, B – виграє другий гравець, C – нічийний результат. Для того щоб гру виграв перший гравець, йому необхідно виграти 6, 7, 8, 9 або 10 партій. Тому, за формулою Бернуллі і теоремою додавання ймовірностей

$$P(A) = P_{10}(6) + P_{10}(7) + P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10) = C_{10}^6 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \\ + C_{10}^7 \left(\frac{2}{3}\right)^7 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + C_{10}^8 \left(\frac{2}{3}\right)^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_{10}^9 \left(\frac{2}{3}\right)^9 \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 0,7869.$$

$$P(C) = P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 0,1366.$$

Події A, B, C складають повну групу, тому

$$P(B) = 1 - P(A) - P(C) = 1 - 0,7869 - 0,1366 = 0,0766.$$

Зауваження. Для наближеного обчислення $n!$ при великих значеннях n корисною є формула Стірлінга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \times n^{n+\frac{1}{2}} \times e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \times n^n \times e^{-n}.$$

Приклад 2. За даними технічного контролю в середньому 2% виготовлених на заводі годинників потребують додаткового регулювання. Знайти ймовірність того, що зі 100 годинників, виготовлених на заводі, додатково відрегулювати потрібно буде не більш, ніж три годинники.

Розв'язання. Оскільки $n = 100$ велике число, а $p = 0,02$ мале, то шукану ймовірність можна знайти за формулою Пуассона:

$$l = np = 100 \times 0,02 = 2;$$

$$P(A) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3) = e^{-2} \left[\frac{2^0}{0!} + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} \right] \approx 0,85.$$

Приклад 3. Ймовірність схожості насіння дорівнює 0,75. Визначити ймовірність того, що з 500 висіяних насінин не зійде 130.

Розв'язання. Оскільки $n = 500$ велике число, а $p = 1 - 0,75 = 0,25$ не є близьким до нуля, то для обчислення $P_{500}(130)$ застосуємо локальну теорему Лапласа. Для цього обчислимо

$$\sqrt{npq} = \sqrt{500 \times 0,25 \times 0,75} \gg 9,682; \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{130 - 500 \times 0,25}{9,682} \gg 0,52.$$

Знаходимо $j(0,52)$ за таблицею функції Гаусса ([4], [5], [6])
 $j(0,52) = 0,3485$. Тоді за формулою

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \times j(x)$$

дістанемо

$$P_{500}(130) = \frac{j(0,52)}{9,682} = \frac{0,3485}{9,682} \gg 0,036.$$

Приклад 4. При дослідженні впливу легування на схильність сталі до перегріву виявлено, що ймовірність зниження ударної в'язкості термічно обробленого металопрокату становить $p = 0,2$. Знайти ймовірність того, що серед 225 зразків від 30 до 50 виробів матимуть знижену ударну в'язкість.

Розв'язання. Маємо $p = 0,2$; $q = 1 - p = 0,8$; $n = 225$; $k_1 = 30$; $k_2 = 50$. Обчислимо

$$x_1 = \frac{30 - 225 \times 0,2}{\sqrt{225 \times 0,2 \times 0,8}} = -2,5; \quad x_2 = \frac{50 - 225 \times 0,2}{\sqrt{225 \times 0,2 \times 0,8}} = 0,833.$$

$$P_{225}(30;50) \gg F(0,833) - F(-2,5) = F(0,833) + F(2,5).$$

Користуючись таблицею $F(x)$, знаходимо: $F(0,833) = 0,2976$;
 $F(2,5) = 0,4938$.

Таким чином, $P_{225}(30;50) \gg 0,2976 + 0,4938 = 0,7914$.

Тема 6. Випадкові величини

Література : [3], гл. 6, § 6.7. – 6.9, 6.11; [4], гл. 4, § 1-3; гл. 5, § 1-6; [5], гл. 6, § 1-6; гл. 7; гл. 8, § 1-7; гл. 9, § 2,3; гл. 10-13; [6], гл. 5, § 5,6, 8-11; [7], гл. 10, § 34; 35; [9], гл. 20, § 7,9,10, 12-14; § 15-17; [10], гл. 2, § 2.2.

6.1. Числові характеристики випадкових величин

Розв'язання типових прикладів

Приклад 1. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

x_i	13	18	19	x_4	25
p_i	0,18	p_2	0,22	0,2	0,15

Знайти невідомі x_4 та p_2 , якщо $M(X) = 18,77$. Обчислити $D(X)$.

Розв'язання. Для знаходження невідомої p_2 використовуємо умову

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \text{ тобто } 0,18 + p_2 + 0,22 + 0,2 + 0,15 = 1, \text{ звідки } p_2 = 0,25.$$

Математичне сподівання обчислюємо за формулою

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times p_i.$$

$$\text{Маємо } 13 \times 0,18 + 18 \times 0,25 + 19 \times 0,22 + x_4 \times 0,2 + 25 \times 0,15 = 18,77.$$

$$\text{Тоді } 14,77 + 0,2 \times x_4 = 18,77, \text{ звідки } x_4 = \frac{4}{0,2} = 20.$$

Отже, закон розподілу дискретної величини приймає вигляд

x_i	13	18	19	20	25
p_i	0,18	0,25	0,22	0,2	0,15

Дисперсію обчислюємо за формулою

$$D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \times p_i - [M(X)]^2 =$$

$$= 13^2 \times 0,18 + 18^2 \times 0,25 + 19^2 \times 0,22 + 20^2 \times 0,2 + 25^2 \times 0,15 - (18,77)^2 =$$

$$= 364,59 - 352,3129 = 12,2771.$$

Приклад 2. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

x_i	1	2	x_3	6	7
p_i	0,2	0,3	0,15	p_4	0,1

Знайти невідомі x_3 та p_4 , якщо $D(X) = 4,74$.

Розв'язання. Знайдемо p_4 за умовою $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, тобто

$$0,2 + 0,3 + 0,15 + p_4 + 0,1 = 1, \text{ звідки } p_4 = 0,25.$$

Дисперсію обчислюємо за формулою:

$$D(X) = \sum_{i=1}^k x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^k x_i p_i \right)^2.$$

$$\text{Отже, } 1^2 \times 0,2 + 2^2 \times 0,3 + x_3^2 \times 0,15 + 6^2 \times 0,25 + 7^2 \times 0,1 -$$

$$- (1 \times 0,2 + 2 \times 0,3 + x_3 \times 0,15 + 6 \times 0,25 + 7 \times 0,1)^2 = 4,74;$$

$$17x_3^2 - 120x_3 + 208 = 0;$$

$$x_3 = \frac{120 \pm 16}{34}; \quad x_3^{(1)} = \frac{120 + 16}{34} = \frac{136}{34} = 4;$$

$$x_3^{(2)} = \frac{120 - 16}{34} = \frac{104}{34} = \frac{52}{17} = 3\frac{1}{17}.$$

З умови того, що x_i - ціла величина, маємо розв'язок $x_3 = 4$.

Закон розподілу приймає вигляд

x_i	1	2	4	6	7
p_i	0,2	0,3	0,15	0,25	0,1

Приклад 3. Неперервна випадкова величина задана функцією розпо-

$$\text{ділу} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 8; \\ \frac{1}{3}(x - 8)^3, & 8 < x \leq 9; \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $S(X)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку щільність розподілу ймовірностей $f(x)$. Оскільки $f(x) = F'(x)$, то

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 8; \\ \frac{1}{3}3(x - 8)^2, & 8 < x \leq 9; \\ 0, & x > 9. \end{cases}$$

Оскільки $f(x)$ задана на $(a; b)$, то $M(X) = \int_a^b x f(x) dx$. Отже маємо

$$M(X) = \int_8^9 x \times 3(x - 8)^2 dx = 3 \int_8^9 x(x - 8)^2 dx = \left| \begin{array}{ccc} x - 8 = t & & \\ x = t + 8 & & \\ x & 8 & 9 \\ t & 0 & 1 \end{array} \right| =$$

$$= 3 \int_0^1 (t + 8)t^2 dt = 3 \int_0^1 (t^3 + 8t^2) dt = 3 \left[\frac{t^4}{4} + 8 \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 3 \left[\frac{1}{4} + \frac{8}{3} \right] =$$

$$= 3 \frac{3 + 32}{12} = \frac{25}{4} = 6,25.$$

Оскільки $f(x)$ задана на $(a; b)$, то $D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2$.

Отже

$$D(X) = \int_8^9 x^2 \times 3(x - 8)^2 dx - [M(X)]^2 = 3 \int_8^9 (x^4 - 16x^3 + 64x^2) dx - 6,25^2 =$$

$$= 3\frac{x^5}{5} - 4x^4 + \frac{64}{3}x^3 \Big|_8^9 - 39,06 = \frac{383}{5} - 39,06 = 37,54.$$

$$s(X) = \sqrt{D(X)} = 6,13.$$

Приклад 4. Неперервна випадкова величина задана щільністю розподілу ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{p} \frac{a}{x^2 + 1}, & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти $D(X), M(X), s(X)$.

Розв'язання. Виходячи з властивості $f(x)$, а саме з того, що

$$\int_0^1 f(x) dx = 1, \text{ маємо } \int_0^1 \frac{a}{x^2 + 1} dx = 1. \text{ Тоді}$$

$$\int_0^1 \frac{a}{x^2 + 1} dx = a \arctg x \Big|_0^1 = a(\arctg 1 - \arctg 0) = a \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{a\pi}{4} = 1, \quad a = \frac{4}{\pi}.$$

$$\text{Таким чином, маємо } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{4}{\pi(x^2 + 1)}, & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$$\text{Математичне сподівання } M(X) = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 \frac{4x}{\pi(x^2 + 1)} dx = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} (\ln(1 + 1) - \ln 1) = \frac{2}{\pi} \ln 2 \approx 0,4413.$$

$$\text{Дисперсія } D(X) = \int_0^1 x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \int_0^1 \frac{4x^2}{\pi(x^2 + 1)} dx - 0,4413^2 =$$

$$= \frac{4}{p} \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right) \Big|_0^1 - 0,195 = \frac{4}{p} (x - \arctg x) \Big|_0^1 - 0,195 = \frac{4}{p} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - 0,195 =$$

$$= \frac{4}{p} - 1 - 0,195 = 0,08.$$

Середнє квадратичне відхилення $S(X) = \sqrt{D(X)} = 0,28$.

6.2. Закони розподілу дискретних та неперервних випадкових величин

При вивченні матеріалу цього розділу та розв'язанні відповідних задач контрольної роботи студент повинен користуватися рекомендованою літературою та формулами, що наведені у п. 6.2, 6.3 довідкового матеріалу.

Приклад 1. Баскетболіст проводить 4 кидки по корзині з однієї й тієї ж позиції. Ймовірність попадання при одному кидку дорівнює 0,8. Скласти закон розподілу кількості попадань у кошик, знайти середнє значення, дисперсію та середнє квадратичне відхилення кількості попадань.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X (кількість попадань м'яча у корзину) приймає наступні ймовірні значення $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$.

Результати кидків не залежать один від одного, ймовірність попадання при одному кидку постійна. Це означає, що випадкова величина X розподілена за біноміальним законом.

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

де $n = 4$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$; $p = 0,8$; $q = 1 - p = 0,2$.

Обчислимо $P(0) = C_4^0 p^0 q^4 = (0,2)^4 = 0,0016$;

$$P(1) = C_4^1 p q^3 = 4 \times 0,8 \times 0,2^3 = 0,0256$$

$$P(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \times 0,8^2 \times 0,2^2 = 0,1536$$

$$P(3) = C_4^3 p^3 q = 4 \times 0,8^3 \times 0,2 = 0,4096$$

$$P(4) = C_4^4 p^4 q^0 = 0,8^4 = 0,4096.$$

Перевіримо вірність обчислень :

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 + 0,4096 = 1.$$

Закон розподілу має вигляд:

<i>x</i>	0	1	2	3	4
<i>p</i>	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Математичне сподівання (середнє значення) кількості влучань

$$M(X) = np = 4 \times 0,8 = 3,2, \text{ дисперсія } D(X) = npq = 4 \times 0,8 \times 0,2 = 0,64,$$

середнє квадратичне відхилення $s(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,64} = 0,8$.

Приклад 2. Кількість викликів, що надходять на телефонну станцію протягом T хвилин є випадковою величиною, що розподілена за законом Пуассона з параметрами $l = aT$, де $a = 2$ хвилини. Знайти ймовірність того, що на станцію протягом півхвилини поступлять 2 виклики.

Розв'язання. За законом Пуассона

$$P_T(k) = \frac{l^k \times e^{-l}}{k!}.$$

Вважаючи $T = 0,5$, $k = 2$, одержимо

$$P_{0,5}(2) = \frac{e^{-1}}{2!} = \frac{0,3679}{2} = 0,1839.$$

Приклад 3. Автобуси деякого маршруту рухаються точно за розкладом. Проміжок руху 5 хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, чекатиме черговий автобус менше ніж 3 хвилини.

Розв'язання. Пасажир може підійти до зупинки у будь-який момент. Тому час очікування можна вважати випадковою величиною X , що рівномірно розподілена у інтервалі руху автобусів.

Щільність розподілу $f(x) = \frac{1}{b-a}$, де $(b-a)$ - довжина інтервалу, у якому знаходяться ймовірні значення X . У цій задачі $b-a = 5$, тому

$f(x) = \frac{1}{5}$. Оскільки автобуси йдуть точно за розкладом (тобто наступний прийде не раніше означеного часу), то пасажир чекатиме його менше ніж 3 хвилини, якщо $2 < x < 5$.

Ймовірність попадання випадкової величини в деякий інтервал обчислюється за формулою

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Отже,
$$P(2 < X < 5) = \int_2^5 \frac{1}{5} dx = \frac{x}{5} \Big|_2^5 = \frac{3}{5}.$$

Приклад 4. Середній час безвідмовної роботи радіоелектронного обладнання літака за статистичними даними складає 200 годин. Знайти ймовірність відмови обладнання протягом 10 годин польоту.

Розв'язання. Час безвідмовної роботи обладнання є випадковою величиною T , розподіленою за показниковим законом

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ 1 - e^{-lt}, & t > 0, \end{cases}$$

де l - інтенсивність відмов (кількість відмов за одиницю часу).

У даному випадку $t = 10$, $l = \frac{1}{200}$ і ймовірність відмови за час t

$$P(T < t) = 1 - e^{-lt} = 1 - e^{-\frac{10}{200}} = 0,049.$$

Приклад 5. Для дослідження продуктивності певної породи свійської птиці вимірюють діаметр яєць. Найбільший поперечний діаметр яєць є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з середнім значенням 5 см і середнім квадратичним відхиленням 0,3 см. Знайти ймовірність того, що: а) діаметр узятго навмання яйця буде знаходитись в межах від 4,7 до 6,2 см; б) відхилення діаметра яйця від середнього не перевершить за абсолютною величиною 0,6 см.

Розв'язання. Випадкова величина X – найбільший поперечний діаметр яйця, математичне сподівання (середнє значення) при нормальному законі розподілу $a = 5$, середнє квадратичне відхилення $s = 0,3$. Ймовірність попадання випадкової величини X у інтервал (a, b)

$P(a < x < b) = F\left(\frac{b-a}{s}\right) - F\left(\frac{a-a}{s}\right)$, де $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – інтегральна функція Лапласа (її значення наведені у відповідній таблиці).

Оскільки $a = 4,7$, $b = 6,2$, маємо

$$P(4,7 < x < 6,2) = F\left(\frac{6,2-5}{0,3}\right) - F\left(\frac{4,7-5}{0,3}\right) = F(4) + F(1) = 0,3413 + 0,5 = 0,8413.$$

Ймовірність відхилення випадкової величини X від її середнього значення на величину $d = 0,6$ $P(|x - a| < d) = 2F\left(\frac{d}{s_x}\right)$, тобто

$$P(|x - 5| < 0,6) = 2F\left(\frac{0,6}{0,3}\right) = 2F(2) = 2 \times 0,4772 = 0,9544.$$

Нормальний розподіл відіграє в теорії ймовірностей і математичній статистиці важливу роль. Це пояснюється, зокрема, тим, що при досить широких припущеннях розподіл суми великого числа випадкових величин виявляється близьким до нормального.

Тема 7. Математична статистика

Література: [5] гл. 15, гл. 16, § 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, гл. 19, § 1; [4] гл. 9, гл. 10, гл. 13, § 1; [8] гл. 5, § 17, 18; [1] розділ 6, п. 6.1-6.8, стор. 106-114, 153-159; [8] гл. 6, § 15 п. 15.1-15.4.

Вивчивши цей розділ, студент повинен знати поняття вибірки, статистичного розподілу, означення незміщеної, ефективної і спроможної оцінок параметрів розподілу, поняття довірчого інтервалу та статистичної

перевірки гіпотез. Він повинен вміти побудувати статистичний розподіл, полігон частот (відносних частот), емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$, знайти оцінки для математичного сподівання (вибіркову середню), визначити незміщену та зміщену оцінку дисперсії, знайти границі довірчого інтервалу для математичного сподівання та дисперсії при довірчій ймовірності (надійності) g , побудувати інтервальний статистичний розподіл вибірки, збудувати гістограму відносних частот.

Студент повинен вміти застосовувати на практиці ці знання для знаходження оцінки статистичних характеристик та параметрів генеральної сукупності, яка розподілена нормально (або має статистичний розподіл, близький до показникового розподілу, біноміального розподілу або розподілу Пуассона) за даними досліджень.

Оцінки, що визначаються одним числом, звуться точковими. Наприклад, вибірка (статистична) середня (математичне сподівання), вибірка (статистична) дисперсія – точкові оцінки. У випадку малого числа спроб ці оцінки можуть привести до суттєвих помилок. У такому разі застосовуються інтервальні оцінки, що визначаються двома числами – границями інтервалу (що містить величину, яка оцінюється з заданою ймовірністю). Таким чином, задача зводиться до визначення такого інтервалу (його називають надійним або довірчим інтервалом), який з заданою ймовірністю (її називають надійністю) охоплює параметр, що оцінюється. Найчастіше надійність приймають рівною $g = 0,95$ або $g = 0,99$.

Розв'язання задач *математичної статистики* потребує великого об'єму обробки даних та обчислень. Відзначимо що потужним інструментарієм статистичної обробки даних володіють електронні таблиці **Microsoft Excel**. Дуже корисним і простим є використання й інших програм, наприклад: **NUMERI**, **MATLAB**, **Mathcad**, **STATISTIKA**, **STATGRAPHICS**.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Задано генеральну сукупність, яка розподілена нормально. Вибірка, що зроблена випадковим способом задається наведеними даними

0,4; 0,4; 1,0; 0,3; 0,6; 0,9; 0,5; 0,4; 0,8; 0,6; 0,5; 0,5; 0,4; 0,8; 0,3; 0,3; 0,6; 0,7;
0,7; 0,3; 0,2; 0,1; 0,4; 0,5; 0,7; 0,2; 0,6; 0,5; 0,4; 0,9.

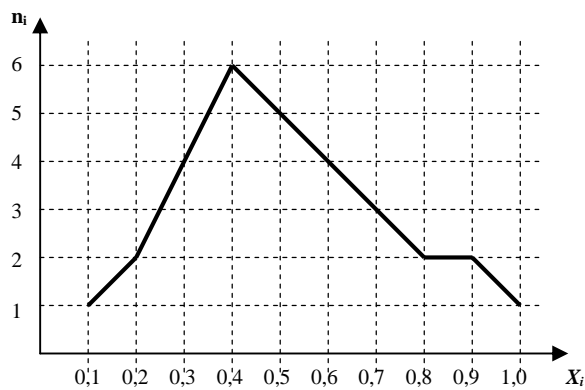
1) Збудувати статистичний розподіл вибірки:

$$n = 30 ; x_{max} = 1,0 ; x_{min} = 0,1 ; D = 1,0 - 0,1 = 0,9.$$

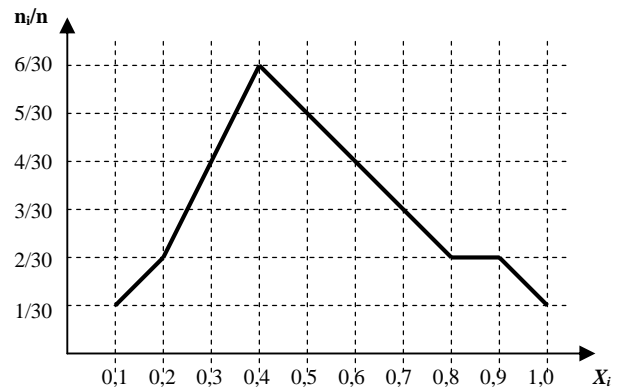
Заповнюємо стовпці **A**, **N** від меншого до більшого значення та в стовпці **B** робимо відмітку (**I**) в відповідному рядку про те, що дане значення варіанти нам зустрічалося. У стовпці **C** підводимо підсумки про кількість відміток в даному рядку – тобто вказуємо частоти цих варіант. Стовпці таблиці **A** і **C** створюють шуканий статистичний розподіл.

N	A	B	C	D	E	F	G
№ п/п	x_i	n_i	n_i	$n_i x_i$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
1	0.1	I	1	0.1	-0.4	0.16	0.16
2	0.2	II	2	0.4	-0.3	0.09	0.18
3	0.3	IIII	4	1.2	-0.2	0.04	0.16
4	0.4	IIIIII	6	2.4	-0.1	0.01	0.06
5	0.5	IIIIII	5	2.5	0	0	0
6	0.6	IIII	4	2.4	0.1	0.01	0.04
7	0.7	III	3	2.1	0.2	0.04	0.12
8	0.8	II	2	1.6	0.3	0.09	0.18
9	0.9	II	2	1.8	0.4	0.16	0.32
10	1.0	I	1	1.0	0.5	0.25	0.25
а	----	-----	30	15.4	-----	-----	1,31

2) Для побудови полігону частот (відносних частот) на осі абсцис відкладають варіанти x_i , на осі ординат – відповідні їм частоти n_i (відносні частоти $W_i = n_i / n$). Точки (x_i, n_i) ($(x_i, n_i / n)$ – для відносних частот) сполучають відрізками прямих і одержують полігон частот (відносних частот).



Полігон частот



Полігон відносних частот

3) Побудувати емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$.

Найменше спостережене значення варіанти дорівнює **0.1**, отже $F^*(x) = 0$ при $x < 0.1$.

Значення $x < 0.2$, а значить $x_I = 0.1$ спостерігалось 1 раз, отже ,
 $F^*(x) = 1/40$, якщо $0.1 \leq x < 0.2$.

Значення $x < 0.3$ спостерігалось $1 + 2 = 3$ рази. Отже $F^*(x) = 3/30$,
 якщо $0.2 \leq x < 0.3$.

Значення $x < 0.4$ спостерігалось $3 + 4 = 7$ разів. Отже $F^*(x) = 7/30$,
 якщо $0.3 \leq x < 0.4$.

Значення $x < 0.5$ спостерігалось $7 + 6 = 13$ разів. Отже $F^*(x) = 13/30$,
 якщо $0.4 \leq x < 0.5$.

Значення $x < 0.6$ спостерігалось $13 + 5 = 18$ разів. Отже $F^*(x) = 18/30$,
 якщо $0.5 \leq x < 0.6$.

Значення $x < 0.7$ спостерігалось $18 + 4 = 22$ разів. Отже $F^*(x) = 22/30$,
 якщо $0.6 \leq x < 0.7$.

Значення $x < 0.8$ спостерігалось $22 + 3 = 25$ разів. Отже $F^*(x) = 25/30$,
 якщо $0.7 \leq x < 0.8$.

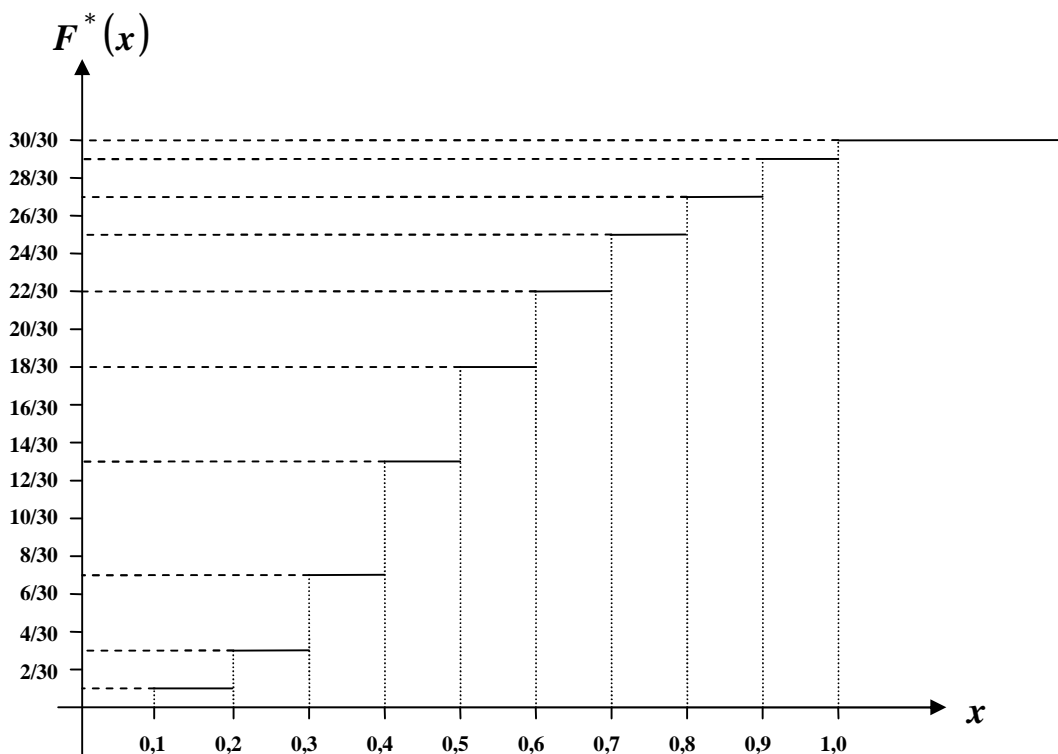
Значення $x < 0.9$ спостерігалось $25 + 2 = 27$ разів. Отже $F^*(x) = 27/30$,
 якщо $0.8 \leq x < 0.9$.

Значення $x < 1.0$ спостерігалось $27 + 2 = 29$ разів. Отже $F^*(x) = 29/30$,
 якщо $0.9 \leq x < 1.0$.

Найбільше значення, що спостерігалось, $x = 1.0$, отже $F^*(x \leq 1.0) = 1$.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0,1 \\ 1/30, & \text{якщо } 0,1 \leq x < 0,2 \\ 3/30, & \text{якщо } 0,2 \leq x < 0,3 \\ 7/30, & \text{якщо } 0,3 \leq x < 0,4 \\ 13/30, & \text{якщо } 0,4 \leq x < 0,5 \\ 18/30, & \text{якщо } 0,5 \leq x < 0,6 \\ 22/30, & \text{якщо } 0,6 \leq x < 0,7 \\ 25/30, & \text{якщо } 0,7 \leq x < 0,8 \\ 27/30, & \text{якщо } 0,8 \leq x < 0,9 \\ 29/30, & \text{якщо } 0,9 \leq x < 1,0 \\ 1, & \text{якщо } x \geq 1,0 \end{cases}$$

4) Графік емпіричної функції розподілу $F^*(x)$



5) Знайти оцінку для математичного сподівання (вибіркову середню).

Множимо відповідні значення x_i й n_i (стовпці A й C), результати заносимо у стовпець D , після чого обчислюємо його суму і ділимо її на n :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} n_i \times x_i}{n} = \frac{15.4}{30} = 0.51(3) \approx 0.5.$$

6) Визначити незміщену оцінку дисперсії

Від кожного зі значень стовпця A віднімаємо знайдене значення вибіркового середнього (оцінку математичного сподівання) \bar{x} , а потім цю різницю записуємо в стовпець E . Квадрат цієї різниці запишемо в стовпець F . Після множення стовпця E на стовпець C заповнюємо стовпець G та знаходимо суму стовпця G .

$$x_1 - \bar{x} = 0.1 - 0.5 = -0.4; \quad (x_1 - \bar{x})^2 = 0.16; \quad n_1 \cdot (x_1 - \bar{x})^2 = 1 \cdot 0.16 = 0.16.$$

Для скорочення обчислень на калькуляторі можна не заповнювати стовпці E та F , а одразу отримати результат для стовпця G , натискаючи клавіші калькулятора за схемою: $(x_i - \bar{x}) = \otimes = \otimes n_i =$.

$$\overline{D_x} = \frac{\sum_{i=1}^N n_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{1.31}{30 - 1} = 0.045.$$

7) Знайти зміщену оцінку дисперсії.

$$\overline{D_x}^* = \frac{\sum_{i=1}^N n_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1.31}{30} = 0.044;$$

8) Визначити границі довірчого інтервалу для математичного сподівання при довірчій ймовірності (надійності) $g = 0.95$.

$$\overline{s} = \sqrt{\overline{D_x}} = \sqrt{0.045} = 0.212; \quad \bar{x} = 0.5; \quad \sqrt{n} = \sqrt{30} = 5.48; \quad k = 30 - 1 = 29;$$

$$a = 1 - g = 0.05;$$

Число $t_g = 2.05$ знаходимо за таблицями розподілу Стюдента (дивись додатки) за заданою надійністю g ($a = 1 - g$) і числом степенів свободи $k = n - 1$.

Підставляємо обчислені та знайдені за таблицею значення в формулу

$$\bar{x} - t_g \cdot \frac{\overline{s}}{\sqrt{n}} < a = m_x < \bar{x} + t_g \cdot \frac{\overline{s}}{\sqrt{n}}; \quad 0.5 - 2.05 \cdot \frac{0.212}{5.48} < a = m_x < 0.5 + 2.05 \cdot \frac{0.212}{5.48}.$$

Тоді довірчий інтервал $0,42 < a = m_x < 0,58$.

9) Визначити границі довірчого інтервалу для дисперсії при довірчій ймовірності (надійності) $g = 0,95$.

Для нормального розподілу справедлива формула для границь довірчого інтервалу для дисперсії при довірчій ймовірності (надійності) g :

$$\frac{n \times \overline{D_x}}{c_2^2} < D_x < \frac{n \times \overline{D_x}}{c_1^2},$$
 де c_1^2 – значення випадкової величини, що має розподіл c^2 з числом степенів свободи $f_1 = n - 1 = 29$ при рівні значимості $a_1 = 1 - \frac{a}{2} = 0,975$, де $a = 1 - g = 0,05$; c_2^2 – значення випадкової величини, що має розподіл c^2 з числом степенів свободи $f_2 = n - 1 = 29$ при рівні значимості $a_2 = \frac{a}{2} = 0,025$.

За таблицею розподілу «хі- квадрат» маємо: $c_1^2 = 16,0$; $c_2^2 = 45,7$. Підставляємо обчислені та знайдені за таблицею значення в формулу

$$\frac{30 \times 0,045}{45,7} < D_x < \frac{30 \times 0,045}{16,0}.$$

Таким чином довірчий інтервал $0,030 < D_x < 0,085$.

10) Розбивши інтервал на 5 рівних підінтервалів, побудувати інтервальний статистичний розподіл вибірки.

$$n = 30 ; x_{max} = 1,0 ; x_{min} = 0,1 ; D = 1,0 - 0,1 = 0,9 ;$$

Спочатку запишемо інтервальний ряд з кроком Dx :

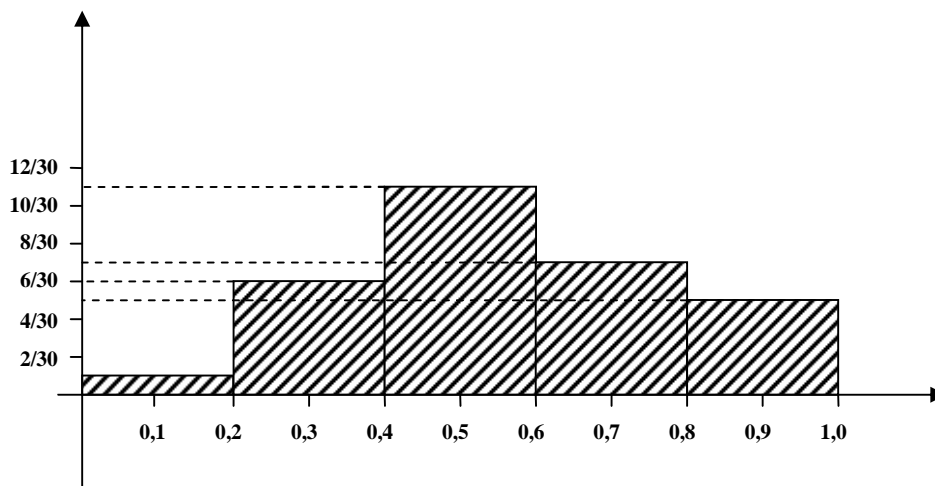
$$Dx = D/5 = 0,18 \approx 0,2 ; \quad \bar{x}_0 = x_1 - Dx/2 = 0,1 - 0,1 = 0 ;$$

	[0; 0.2)	[0.2 ;0.4)	[0.4;0.6)	[0.6;0.8)	[0.8;1.0]
n_i	1	6	11	7	5
$w_i = n_i / n$	1/30	6/30	11/30	7/30	5/30

\bar{x}_i	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
-------------	-----	-----	-----	-----	-----

11) Побудувати гістограму відносних частот.

Для побудови гістограми відносних частот на осі абсцис відкладають часткові інтервали, а над ними проводять відрізки, паралельні осі абсцис, на відстані $w_i = n_i/n$. Площа i -го часткового прямокутника дорівнює W_i - відносній частоті варіант, що попали в i -й інтервал.



Для наведених нижче вибірок (приклади 2–4) знайти оцінки статистичних характеристик та параметрів розподілу.

Приклад 2. Дано статистичний розподіл, близький до розподілу Пуассона:

X	0	1	2	3
n_i	116	56	22	6

Знайти оцінки параметра l .

Розв'язання

$$n = 116 + 56 + 22 + 6 = 200;$$

$$\bar{l} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=0}^3 n_i \times x_i}{n} = \frac{116 \times 0 + 56 \times 1 + 22 \times 2 + 6 \times 3}{200} = 0.6.$$

Приклад 3. Дано статистичний розподіл, близький до показникового:

X	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)	[4;5)	[5;6]
n_i	259	167	109	74	70	47

$\overline{x_i}$	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5
------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Знайти оцінки параметра l .

Розв'язання

$$n = 259 + 167 + 109 + 74 + 70 + 47 = 726;$$

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\sum_{i=0}^6 n_i \times \overline{x_i}}{n} = \frac{259 \times 0.5 + 167 \times 1.5 + 109 \times 2.5 + 74 \times 3.5 + 70 \times 4.5 + 47 \times 5.5}{726} = \\ &= \frac{129.5 + 250.5 + 272.5 + 259 + 258.5}{726} = \frac{1170}{726} = 1.61. \end{aligned}$$

$$\overline{l} = \frac{1}{\overline{x}} = \frac{1}{1.61} = 0.62.$$

Приклад 4. Дано статистичний розподіл, близький до біноміального:

X	0	1	2	3	4	5
n_i	72	77	34	14	2	1

найти оцінки параметра p^* .

Розв'язання

$$m = 5; \quad n = 72 + 77 + 34 + 14 + 2 + 1 = 200;$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=0}^5 n_i \times x_i}{n} = \frac{72 \times 0 + 77 \times 1 + 34 \times 2 + 14 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 5}{200} = \frac{200}{200} = 1.$$

$$p^* = \frac{\overline{x}}{m} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Завдання до контрольної роботи №7

Завдання 1. Розв'язати задачу:

1. Скільки можна скласти з простих дільників числа 2310 складених чисел, що містять тільки два простих дільники?
2. У маршрутному таксі 10 пасажирів. Таксі робить 12 зупинок. Скількома способами всі пасажери можуть вийти з таксі, якщо на кожній зупинці виходить не більш ніж один пасажир?
3. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складені всі можливі п'ятизначні числа без повторення цифр. Скільки серед цих п'ятизначних чисел таких, які не починаються з 543?
4. Скількома способами можна групу з 20 студентів розділити на три підгрупи відповідно з 8, 7 і 5 чоловік?
5. У шаховому турнірі, де учасники зустрічаються між собою один раз, два шахісти вибули через хворобу, встигнувши зіграти тільки по три партії кожний. Скільки шахістів починали турнір, якщо всього було зіграно 84 партії?
6. Скільки різних чотиризначних чисел можна записати, вживаючи кожную з наступних цифр 1, 3, 5, 7, 9, 0 тільки один раз?
7. З десяти різних квіток потрібно скласти букет так, щоб у нього входило не менш ніж дві квітки. Скільки способів існує для складання такого букета ?
8. З цифр 0, 1, 2, 3 складені всі можливі чотиризначні числа так, що в кожному числі немає однакових цифр. Скільки вийшло парних чисел?
9. Скількома способами можна виставити на гру футбольну команду, що складається з 3 нападаючих, 3 півзахисників, 4 захисників і 1 воротаря, якщо всього в команді 6 нападаючих, 6 півзахисників, 8 захисників і 2 воротарі?

10. Положення площини в просторі визначається трьома точками, що не лежать на одній прямій. Скільки різних площин можна провести через 10 точок, якщо ніякі 3 точки не лежать на одній прямій і ніякі 4 точки не лежать в одній площині ?

Завдання 2. Розв'язати задачу:

1. В урні знаходяться 5 чорних, 5 білих та 5 червоних кульок. Навмання виймають одразу 3 кульки. Яка ймовірність того, що усі вони червоні?
2. У лотереї 100 білетів і 30 з них – виграшні. Яка ймовірність того, що з придбаних трьох білетів тільки один виграшний?
3. У одному конверті лежать картки з номерами від 1 до 10, а у другому – з номерами від 11 до 20. З кожного конверта навмання виймається одна картка. Яка ймовірність того, що сума чисел на цих двох картках не перевищує 15?
4. В урні знаходяться 5 чорних, 6 білих та 7 червоних кульок. Навмання виймаються одразу 3 кульки. Яка ймовірність того, що усі вони різні?
5. В урні знаходяться 3 чорних, 4 білих та 5 червоних кульок. Навмання виймаються одразу 2 кульки. Яка ймовірність, що вони одного кольору?
6. Під час стрільби з гвинтівки відносна частота попадань у ціль виявилася рівною 0,9. Знайти число попадань з 15 пострілів.
7. Після бурі на ділянці між 10-м і 100-м кілометрами телефонної лінії обірвався провід. Знайти ймовірність того, що обрив стався між 35-м і 40-м кілометрами (припускається рівноможливим обрив у будь-якій точці лінії).
8. Ви у команді, що складається з 10 осіб. На майданчик для гри виходять шестеро, що вибираються випадково. Яка ймовірність того, що ви вийдете на майданчик?
9. Група спортсменів, що складається з 4 майстрів спорту та 6 першорозрядників, випадково розподіляється на дві команди. Яка ймовірність того, що команди рівні за майстерністю?

10. У туристів було 7 консервних банок: 3 з м'ясом, 2 з овочами і 2 з фруктами. Припустимо, що під час дощу етикетки на банках відклеїлися, а всі банки однакові. Яка ймовірність того, що три банки, відкриті навмання, будуть відрізнятися змістом?

Завдання 3. Розв'язати задачу:

1. Студент повинен скласти залік і екзамен з вищої математики. Ймовірність того, що студент складе залік, дорівнює 0,8. Якщо залік складено, то студент допускається до екзамену, ймовірність складання якого для нього становить 0,9. Яка ймовірність того, що студент складе і залік, і екзамен?
2. Деталь послідовно і незалежно обробляється чотирма робітниками. Ймовірність браку для кожного складає 0,2. Яка ймовірність того, що деталь вийде якісною?
3. Жінка, яка випадково зайшла в супермаркет, придбає там що-небудь з ймовірністю 0,9. Для чоловіка така ймовірність становить 0,3. В магазин зайшли двоє чоловіків і одна жінка. Яка ймовірність того, що усі вони зроблять покупки?
4. Для підприємства потрібні два менеджера. Серед претендентів 45% жінок та 55% чоловіків. Яка ймовірність того, що: а) будуть обрані чоловік та жінка; б) будуть обрані двоє однополіх менеджерів?
5. На металургійному факультеті англійську мову вивчають 130 студентів, німецьку – 50, французьку – 60. Яка ймовірність того, що обраний на стажировку за кордон студент вивчає дві іноземні мови, якщо на факультеті навчається 150 студентів?
6. Ймовірність банкрутства для однієї фірми становить 0,4, а для іншої – на 25% менше. Визначити ймовірність того, що збанкрутує принаймні одна з них.
7. Прилад містить два незалежно працюючих елемента. Ймовірність відмови першого дорівнює 0,05, другого – 0,08. Знайти ймовірність відмови приладу, якщо для цього достатньо відмови хоча б одного з елементів.

8. Троє студентів розв'язують одну задачу. Яка ймовірність того, що задача буде розв'язана, якщо ймовірність зробити це для них дорівнює $p_1 = 0,5$; $p_2 = 0,7$; $p_3 = 0,45$.
9. Маємо кошик з 9 тенісними м'ячами. Для гри беруть три м'яча. Після гри кладуть їх знову в кошик. Яка ймовірність того, що після трьох ігор у кошику не залишиться м'ячей, якими ще не грали, якщо м'ячі вибирають випадковим чином?
10. Ймовірність ліквідації заборгованості за користування електроенергією першим підприємством становить 0,6, другим – дорівнює додатному кореню рівняння $5p^2 - 4p = 0$, а третім – 50% від суми перших ймовірностей. Визначити ймовірність того, що лише два підприємства ліквідують заборгованість, а третє відключає від електромережі.

Завдання 4. Розв'язати задачу:

1. На заводі металевих виробів болти виготовляють на трьох машинах. Перша машина виробляє 25%, друга – 35% і третя – 40% усієї продукції, а брак становить відповідно 5%, 4% і 2%. 1) Яка ймовірність того, що навмання взятий болт виявиться бракованим? 2) Навмання взятий болт виявився бракованим. Яка ймовірність того, що він зроблений другою машиною?
2. В першій урні міститься 4 білих і 3 чорних кулі, а в другій – 4 білих і 4 чорних. З першої урни переклали в другу 2 кулі невідомого кольору. 1) Знайти ймовірність того, що вийнята після цього з другої урни куля буде білою. 2) Вийнята після цього з другої урни куля біла. Знайти ймовірність того, що з першої урни в другу переклали 1 білу та 1 чорну кулі.
3. Два стрільці незалежно один від одного стріляють по мішені, роблячи кожен по одному пострілу. Ймовірність попадання в мішень першого стрільця 0,8, другого – 0,65. 1) Яка ймовірність того, що в мішені буде

одна пробоїна? 2) Після стрільби в мішені виявлена одна пробоїна. Знайти ймовірність того, що в мішень влучив перший стрілець.

4. При дослідженні жирності молока корів усе стадо було розбите на три групи. В першій групі виявилося 70%, у другій 23% і в третій 7% усіх корів. Ймовірність того, що молоко, отримане від окремої корови, має жирність не менш ніж 4%, для кожної групи корів відповідно дорівнює 0,6, 0,35 і 0,1. 1) Визначити ймовірність того, що жирність молока у навімання взятої корови становить не менш ніж 4%. 2) Жирність молока у навімання взятої корови становить не менш ніж 4%. Знайти ймовірність того, що ця корова з першої групи.
5. У ящик, що містить 3 однакові деталі, кинута стандартна деталь, а потім навімання виїнята одна деталь. Усі можливі припущення про число стандартних деталей, що спочатку знаходилися в ящику, рівноймовірні. 1) Знайти ймовірність того, що виїнята деталь стандартна. 2) Виїнята деталь стандартна. Знайти ймовірність того, що спочатку в ящику було 2 стандартні деталі.
6. Для посіву заготовлено насіння 4-х сортів пшениці. Причому 20% усього насіння 1-го сорту, 30% - 2-го сорту, 10% - 3-го сорту і 40% - 4-го сорту. Ймовірність того, що з зерна виросте колос, який містить не менш ніж 40 зерен, для першого сорту дорівнює 0,5, для другого - 0,3, для третього - 0,2, для четвертого - 0,1. 1) Знайти ймовірність того, що навімання взятє зерно дасть колос, який містить не менш ніж 40 зерен. 2) Навімання взятє зерно дасть колос, який містить не менш ніж 40 зерен. Знайти ймовірність того, що це зерно 2-го сорту.
7. У цеху 20 верстатів. З них 10 марки А, 6 марки В і 4 марки С. Ймовірність того, що якість деталі виявиться найвищою, для цих верстатів відповідно становить 0,9, 0,8 і 0,7. 1) Знайти, який відсоток деталей вищої якості випускає цех у цілому? 2) Якість деталі, взятої навімання, виявилася найвищою. Яка ймовірність того, що вона зроблена на верстаті марки А?
8. У першому ящику знаходяться 18 білих і 2 чорних кулі, у другому - 9 білих і 1 чорна. З другого ящика переклали в перший ящик кулю, колір

якої невідомий. 1) Знайти ймовірність того, що куля, навмання взята після цього з першого ящика, буде білою. 2) Куля, навмання взята після цього з першого ящика, біла. Яка ймовірність того, що з другого ящика було перекладено в перший ящик чорну кулю?

9. Економіст-аналітик умовно підрозділяє ситуацію в деякій країні на “хорошу”, “посередню” і “погану”. На тиждень, що розглядається, він прогнозував її вид відповідно з ймовірностями 0,1, 0,7 і 0,2. Деякий індекс економічного стану зростає з ймовірністю 0,6, якщо ситуація “хороша”, з ймовірністю 0,3, якщо ситуація “посередня”, і з ймовірністю 0,1, якщо ситуація “погана”. 1) Знайти ймовірність того, що на тиждень, який розглядається, згаданий індекс економічного стану зросте. 2) На тиждень, який розглядається, індекс економічного стану зріс. Яка ймовірність того, що економіка країни була “на підйомі”?
10. Маємо три однакові на вигляд урни. В першій містяться 5 білих та 3 чорних кулі, у другій – 2 білих та 4 чорних, у третій – 1 біла та 3 чорних. З навмання вибраної урни виймають одну кулю. 1) Знайти ймовірність того, що ця куля біла. 2) Вийнята куля біла. Знайти ймовірність того, що вона вийнята з другої урни.

Завдання 5. Розв’язати задачу:

1. Ймовірність браку при виробництві деталей складає 15%. Яка буде найімовірніша кількість бракованих серед 500 виготовлених деталей? Яка ймовірність того, що бракованих деталей буде: а) від 150 до 300? б) рівно 220?
2. За даними керівництва застави 80% машин, які прибувають на прикордонну заставу, – легкові автомобілі. Якщо до в’їзду прибуло 10 машин, то яка ймовірність того, що: а) 9 з них будуть легкові? б) від 4 до 8 легкових?
3. Митниця дає офіційну оцінку того, що 20% усіх осіб, що повертаються з-за кордону, не декларує весь товар, на який накладається податок. Якщо

випадково відібрати 6 осіб, які повертаються з-за кордону, то яка ймовірність того, що не менш ніж три з них не задекларують весь товар?

4. Банк видає кредитні картки VISA. Було встановлено, що 40% усіх рахунків повністю оплачуються за їх допомогою. З попереднього року вибрали навмання 6 рахунків. Яка ймовірність того, що 4 з них оплачені за допомогою карток VISA?
5. Каналом зв'язку передається 1000 знаків. Кожен знак може бути перекручений незалежно від решти з ймовірністю 0,005. Знайти приблизне значення ймовірності того, що буде перекручено: 1) не більш ніж три знаки; 2) принаймні один знак.
6. Ймовірність несплати податку для кожного з 400 підприємців дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що податки не сплатять не більш ніж 37 підприємців?
7. Підприємство має 5 постачальників. Ймовірність виконання договору для кожного з них дорівнює 0,7. Визначити ймовірність того, що менш ніж 40% постачальників виконають договір.
8. Ймовірність випуску бракованого виробу дорівнює 0,02. Знайти ймовірність того, що число бракованих виробів буде менше трьох, якщо всього виготовлено 150 виробів.
9. Бізнесмен, вивчивши попит ринку на нові автомобілі, вирішив продати пробну партію з дев'яти таких автомашин. Ймовірність отримати високий прибуток за рахунок кожної машини оцінена в 0,8. Яка ймовірність отримати високий прибуток за рахунок продажу: а) двох автомашин ? б) не більш ніж двох автомашин ? в) від трьох до п'яти автомашин ?
10. За допомогою статистичних даних підраховано, що ймовірність захворіти грипом під час епідемії для кожної особи дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що зі 100 перевірених осіб хворими виявляться: 1) рівно 20 осіб; 2) від 20 до 50 осіб?

Завдання 6. Розв'язати задачу:

1.

x_i	6	9	x_3	12	13
p_i	0,16	p_2	0,17	0,1	0,37

Знайти $x_3, p_2, D(X), S(X)$, якщо $M(X) = 10,47$.

2.

x_i	x_1	5	6	9	10
p_i	0,1	p_2	0,15	0,3	0,25

Знайти p_2 та ціле x_1 ($x_1 < x_2$), якщо $D(X) = 6,81$. Обчислити $M(X)$.

3.

x_i	9	10	11	x_4	18
p_i	0,07	0,32	p_3	0,36	0,15

Знайти $x_4, p_3, D(X), S(X)$, якщо $M(X) = 12,61$.

4.

x_i	1	x_2	4	5	7
p_i	0,2	0,15	0,1	p_4	0,25

Знайти p_4 та ціле x_2 , якщо $D(X) = 4,41$. Обчислити $M(X)$.

5.

x_i	14	15	x_3	21	25
p_i	0,24	0,19	0,32	p_4	0,1

Знайти $x_3, p_4, D(X), S(X)$, якщо $M(X) = 18,26$.

6.

x_i	2	3	x_3	6	7
p_i	0,15	p_2	0,3	0,15	0,2

Знайти p_2 та ціле x_3 , якщо $D(X) = 3,01$. Обчислити $M(X)$.

7.

x_i	18	x_2	21	24	25
p_i	p_1	0,1	0,12	0,15	0,24

Знайти $x_2, p_1, D(X), S(X)$, якщо $M(X) = 21,36$.

8.

x_i	1	2	3	4	x_5
p_i	0,15	0,35	p_3	0,25	0,2

Знайти p_3 та ціле x_5 , якщо $D(X) = 4,71$. Обчислити $M(X)$.

9.

x_i	x_1	15	17	18	21
p_i	0,24	p_2	0,18	0,14	0,28

Знайти $x_1, p_2, D(X), S(X)$, якщо $M(X) = 16,26$.

10.

x_i	1	3	4	x_4	7
p_i	0,15	0,2	p_3	0,3	0,25

Знайти p_3 та ціле x_4 , якщо $D(X) = 4,51$. Обчислити $M(X)$.

Завдання 7. У задачах 1-10 надана функція розподілу або щільність ймовірності неперервної випадкової величини. Потрібно знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $S(X)$.

$$1. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{1}{8}(x-1)^3, & 1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ a(x-3)^2, & 3 < x \leq 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

$$3. F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{(x+1)^3}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{a}{(x-1)^2 + 9}, & 1 \leq x \leq 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

$$5. F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^3 + x}{10}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$$6. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{1}{8}(x^2 - 1), & 1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{a}{3}x, & 0 \leq x < 3, \\ a(4-x), & 3 \leq x \leq 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{a}{4+x^2}, & -2 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$$9. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ \frac{(x-2)^2}{16}, & 2 < x \leq 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ \frac{a}{(x-1)^4}, & x \geq 3. \end{cases}$$

Завдання 8. Розв'язати задачу:

1. Ймовірність безвідмовної роботи кожного з чотирьох пристроїв протягом певного проміжку часу дорівнює 0,9. Скласти закон розподілу випадкової величини X - числа безвідмовно працюючих пристроїв. Знайти

математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

2. Ймовірність помилки автоматизованої системи ідентифікації особи по відбитках пальців складає 0,002. Перевірено 1000 чоловік. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X - числа збоїв системи. Знайти $M(X)$, $D(X)$ і визначити ймовірність того, що величина X прийме значення в межах від 2 до 4.
3. Хвилинна стрілка електронного годинника переміщається стрибком в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в дану мить годинник покаже час, який відрізняється від істинного не більш ніж на 20 секунд.
4. Середній час безвідмовної роботи пристрою складає 750 годин. Яка ймовірність того, що пристрій неперервно пропрацює не менш ніж 1000 годин?
5. Фірма, що займається продажем товарів по каталогу, щомісячно отримує поштою замовлення. Число цих замовлень є нормально розподіленою випадковою величиною з середнім квадратичним відхиленням 560. У 90% випадків число щомісячних замовлень перевищує 12 439. Знайти середнє число замовлень, що отримуються фірмою за місяць.
6. При випробуванні легованої сталі на вміст вуглецю ймовірність того, що у випадково узятій пробі відсоток вуглецю перевищить допустимий рівень, дорівнює 0,01. Вважаючи застосовним закон рідкісних явищ, обчислити, скільки в середньому необхідно випробувати зразків, щоб з ймовірністю 0,95 зазначений ефект спостерігався принаймні 1 раз.
7. Стрілянина ведеться з постійної позиції в заданому напрямку. Середня дальність польоту снаряда дорівнює 120 км. Вважаючи, що дальність польоту снаряда є нормально розподіленою випадковою величиною з середнім квадратичним відхиленням 3 км, знайти відсоток пострілів, що дають переліт від 6 до 9 км.
8. У групі з 10 спортсменів 6 майстрів спорту. Випадковим чином відбирають 3-х спортсменів. Скласти закон розподілу і знайти

математичне сподівання випадкової величини X - числа майстрів спорту з відібраних спортсменів.

9. Дальність до цілі округляється до 10 м. Визначити середню квадратичну помилку округлення і ймовірність отримання помилки не більш ніж 5 м.
10. Деяка система в стаціонарному режимі роботи дає в середньому 15 збоїв за 1000 годин. Знайти ймовірність безвідмовної роботи системи протягом 10 годин.

Завдання 9. Задана генеральна сукупність, яка розподілена нормально. Вибірка, що зроблена випадковим способом, задається наведеними даними. Виконати такі вправи:

- 1) побудувати статистичний розподіл вибірки;
 - 2) побудувати полігони частот і відносних частот;
 - 3) емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$;
 - 4) графік емпіричної функції розподілу $F^*(x)$;
 - 5) знайти оцінки для математичного сподівання (вибіркову середню);
 - 6) визначити незміщену оцінку дисперсії;
 - 7) визначити зміщену оцінку дисперсії;
 - 8) визначити границі довірчого інтервалу для математичного сподівання при довірчій ймовірності (надійності) $g = 0,95$;
 - 9) визначити границі довірчого інтервалу для дисперсії при довірчій ймовірності (надійності) $g = 0,95$;
 - 10) розбивши інтервал на 5 рівних підінтервалів, побудувати інтервальний статистичний розподіл вибірки;
 - 11) побудувати гістограму відносних частот.
-
1. Наводимо дані про витрати часу на виробництво одиниці продукції по 60 виробам: 0,09; 0,09; 0,11; 0,09; 0,09; 0,11; 0,09; 0,08; 0,09; 0,06; 0,08; 0,09; 0,08; 0,10; 0,08; 0,07; 0,09; 0,07; 0,10; 0,07; 0,09; 0,10; 0,06; 0,10.

2. Виміряна максимальна ємність конденсаторів змінної ємності. Результати вимірювань у пФ наведені у таблиці: 4,40; 4,31; 4,40; 4,40; 437; 4,39; 4,38; 4,39; 436; 4,42; 4,35; 4,59; 4,40; 4,43; 4,41; 4,42; 4,40; 4,37; 4,42; 4,40; 4,35; 4,40; 4,40; 4,36.
3. При свердлінні 50 отворів одним і тим самим свердлом з наступними вимірюваннями діаметрів отворів отримані такі дані в мм: 40,29; 40,32; 40,33; 40,2; 40,29; 40,31; 40,35; 40,28; 40,29; 40,29; 40,35; 40,34; 40,33; 40,34; 40,31; 40,33; 40,34; 40,32; 40,30; 40,31; 40,30; 40,30; 40,33; 40,32; 40,33; 40,30; 40,32; 40,31; 40,32; 40,32.
4. Визначається відсоткове відношення номінальної і ринкової цін на акції на фондовому ринку за певний період. Вибірка, зроблена випадковим способом за акціями 50 різних підприємств, задається даними: 98,0; 101,2; 100,0; 96,2; 100,8; 100,0; 98,8; 99,2; 100,5; 100,4; 99,2; 100,0; 99,4; 98,2; 98,2; 97,2; 99,4; 100,4; 98,8; 99,2; 99,4; 100,0; 100,4; 100,5; 100,0; 99,4; 99,2; 100,0; 101,4; 100,3.
5. Вибірка валиків зроблена випадковим способом. Діаметри валиків: 87; 85; 91; 87; 90; 90; 88; 86; 88; 93; 93; 92; 91; 92; 89; 91; 87; 88; 88; 92; 89; 90; 91; 90; 92; 89; 91; 89; 90; 90.
6. Дані про вагу литих виробів, відібраних випадково: 77; 75; 81; 83; 77; 76; 80; 78; 78; 82; 78; 79; 81; 80; 79; 80; 79; 80; 79; 80; 78; 81; 79.
7. Данні про довжину заготовок: 40,35; 40,30; 40,34; 40,34; 40,32; 40,31; 40,30; 40,28; 40,29; 40,33; 40,33; 40,30; 40,29; 40,31; 40,32; 40,231; 40,32; 40,31; 40,32; 40,31.

8. Дані про відсотки виконання плану: 98,0; 99,8; 98,3; 99,8; 101,2; 101,2; 100,8; 100,0; 98,9; 100,5; 99,8; 100,5; 100,0; 100,8; 100,0; 100,5; 100,0; 99,8; 100,0.
9. Дані про вік робітників: 24; 27; 38; 24; 25; 27; 28; 31; 26; 27; 29; 25; 27; 30; 29; 36; 28; 31; 28; 27; 26; 29; 30.
10. Результати вимірювань внутрішніх діаметрів шестірень: 4,35; 4,31; 4,42; 4,40; 4,36; 4,40; 4,40; 4,35; 4,36; 4,40; 4,40; 4,36; 4,40; 4,43; 4,40; 4,42; 4,364 4,40; 4,36.

Завдання 10. Для наведеної нижче вибірки знайти оцінки статистичних характеристик та параметри розподілу.

1. Дано статистичний розподіл, близький до розподілу Пуассона:

X	0	1	2	3	4	5	6
n_i	7	21	26	21	13	7	3

Знайти оцінки параметра I .

2. Дано статистичний розподіл, близький до показникового розподілу:

X	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
n_i	131	46	14	4	2	1

Знайти оцінки параметра I .

3. Дано статистичний розподіл, близький до біноміального розподілу:

X	0	1	2	3	4
n_i	7	21	41	21	7

Знайти оцінки параметра p^* .

4. Дано статистичний розподіл, близький до розподілу Пуассона:

X	0	1	2	3
n_i	115	55	21	5

Знайти оцінки параметра λ .

5. Дано статистичний розподіл, близький до показникового розподілу:

X	[0;400)	[400;800)	[800;1200)	[1200;1600)
n_i	121	95	76	52

Знайти оцінки параметра λ .

6. Дано статистичний розподіл, близький до біноміального розподілу:

X	0	1	2	3	4
n_i	8	20	42	22	8

Знайти оцінки параметра p^* .

7. Дано статистичний розподіл, близький до розподілу Пуассона:

X	0	1	2	3
n_i	37	36	18	6

Знайти оцінки параметра λ .

8. Дано статистичний розподіл, близький до показникового розподілу:

X	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)
n_i	363	245	150	100	70	45

Знайти оцінки параметра λ .

9. Дано статистичний розподіл, близький до біноміального розподілу:

X	0	1	2	3	4
n_i	2	3	10	22	26

Знайти оцінки параметра p^* .

10. Дано статистичний розподіл, близький до розподілу Пуассона:

X	0	1	2	3
n_i	505	336	125	25

Знайти оцінки параметра λ .

Запитання для самоперевірки

1. Що називається вибіркою? Напишіть формулу для обчислення вибіркової середньої.
2. Які оцінки називаються точковими? Дайте означення незміщеної та обґрунтованої оцінок.
3. Які оцінки називаються інтервальними? У яких випадках треба використовувати інтервальні оцінки?
4. Для чого використовується метод найбільшої наявності? Як його використовувати для дискретних та неперервних величин?
5. Як знайти надійний інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу?
6. Як знайти надійний інтервал для оцінки дисперсії нормального розподілу?
7. Дайте означення статистичної гіпотези, наведіть приклади статистичної перевірки гіпотез.

Додаток 1

Критичні точки розподілу Стьюдента

Число степенів свободи	Рівень значущості α (двостороння критична область)					
	0,01	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74

Продовження додатка 1

Число степенів свободи	Рівень значущості α (двостороння критична область)					
	0,01	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	<i>Рівень значущості α (одностороння критична область)</i>					

Додаток 2

Критичні точки розподілу χ^2

Число степенів свободи k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872

Продовження додатка 2

Число степенів свободи <i>k</i>	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Додаток 3

Таблиця значень $t_v = t(v, n)$

n	v			n	v		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 4

Таблиця значень $q_v = q(v, n)$

n	v			n	v		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162